مقدمة في:

بحوث العمليات

(الطرق الكمية في الإدارة)

أ٠د٠ إبراهيم محمد مهدي
أستاذ الرياضيات والإحصاء الإكتوارى
وعميد كلية التجارة (سابقا)

قسم الإحصاء والتأمين
كليةَ التجارة- جامعة المنصورة

العام الجامعي ٢٠٠٦/٢٠٠٧م
الناشر : مكتبة الجلاء الجديدة بالمنصورة
ت: ٠٥٠٢٢٤٧٣٦٠

مقدمة

تُعتبر بحوث العمليات من أهم الدعائم الأساسية التي ترتكز وتعتمد عليها شتى المنشآت لحل المشاكل المعقدة والوصول إلى أمثل الحلول الممكنة ، حيث أن بحوث العمليات لا تقتصر على فرع علمي واحد ، لكن تعتمد على فروع متعددة من العلوم في إطار نظام معين ، كما وأنها تعتمد على الحاسبات الألكترونية في حل العمليات الحسابية المعقدة.

والهدف من هذا المرجع عرض بعض نماذج بحوث العمليات والتى يمكن استخدامها في مجالات الإدارة والمحاسبة والإقتصاد وغير ذلك. وانطلاقاً مما تقدم ، ولتحقيق الغاية من هذا المرجع قمت بعرض بعض نماذج بحوث العمليات التى تُستخدم في المجالات الإدارية والمحاسبية على النحو التالي :

الفصل الأول : نموذج المحاكاة.
الفصل الثاني : الإحلال والتجديد.
الفصل الثالث : تحليل نقطة التعادل.
الفصل الرابع : نظرية اتخاذ القرارات.
الفصل الخامس : نظرية المباريات.
الفصل السادس : نماذج التخصيص.
الفصل السابع : نظرية صفوف الإنتظار.
الفصل الثامن : تحليل سلاسل ماركوف.
الفصل التاسع : طريقة النقل.

وقد اعتمدت في ذلك على أحدث المراجع العربية والأجنبية ، وأرجو أن أكون قدمت انتاجاً متواضعاً لخدمة أبنائي الطلاب بكلية التجارة جامعة المنصورة.

والله ولي التوفيق ....

أ.د. ابراهيم محمد مهدي
يوليو ٢٠٠٦م

المحتويات

الصفحة

الفصل الأول

نموذج المحاكاة

Simulation Models

المحاكاة هو اسلوب كمي يتميز أنه من أكثر الاساليب الكمية مرونة ، والمحاكاة هو محاونة كشف الملامح ، والمظاهر والصفات لنظام حقيقي واقعي وتلعب المحاكاة دوراً كبيراً فى حياتنا المعاصرة ، ويتمثل ذلك في المجالات التالية :

(١) محاكاة المشاكل الصناعية (رقابة المخزون ، تصميم نظم التوزيع ، جدولة الصيانة ، تصميم نظم الإنتظار ، جدولة اعمال الورشة، تصميم نظم الإتصال)

(٢) محاكاة مشاكل الأعمال والإقتصاد (عمليات الشركة ككل ، سلوك المستهلك ، تصميم المشروعات الإستثمارية ، تحديد الأسعار ، عمليات السوق ، دراسة الإقتصاد القومي في ظل مشاكل الكساد والتضخم ، وضع خطط وسياسات ميزان المدفوعات فى اقتصاديات الدول النامية ، التنبؤ الإقتصادي)

(٣) المشاكل السلوكية والإجتماعية (الحراك السكاني ، سلوك الفرد والجماعة)

(٤) محاكاة استراتيجيات وتكتيكات الحروب

ولكي يمكن استخدام أسلوب المحاكاة ، يجب اتباع الخطوات التالية :

(١) تحديد وتعريف المشكلة .

(٢) تحديد المتغيرات والعوامل الهامة .

(٣) عمل نموذج المحاكاة .

(٤) تحديد قيم المتغير التي تم اختيارها .

(٥) القيام بإجراء المحاكاة .

(٦) إختبار النتائج .

(٧) إختيار أحسن طريقة للعمل (إختيار التصرُّف الأمثل) .

مزايا وعيوب المحاكاة :

بعض مزايا المحاكاة :

(١) هو أسلوب يتصف بأنه مباشر ومرن.

(٢) تُستخدم المحاكاة لتحليل الحالات المعقدة والتي يصعب حلها باستخدام النماذج الرياضية.

(٣) يمكن من خلال المحاكاة استخدام أي توزيعات احتمالية وليس من الضروري الإقتصار على توزيعات محددة.

(٤) اختصار الوقت ، وخاصةً عند استخدام الحواسب الآلية.

بعض عيوب المحاكاة :

(١) تتطلب نماذج المحاكاة الجيدة تكاليف مرتفعة ، وقد تستغرق سنوات لتصميمها وبنائها.

(٢) لا تقدم المحاكاة حلولاً مثلى للمشاكل ، إذ أنها اسلوب يقوم على التجربة والخطأ ، ومن ثم يتولد عن المحاكاة حلولاً عدة من كل محاولة.

(٣) يمثل كل نموذج للمحاكاة أسلوباً منفرداً ، ومن ثم لا يمكن تحويل الحلول والإستنتاجات من نموذج يُصمم لمشكلة معينة إلى مشكلة أخرى.

المحاكاة باستخدام أسلوب (مونت كارلو) :

عندما يتضمن النظام عناصر واضحة لها فرضية للتأثير في سلوك النظام ، في هذه الحالة ، فإنه يمكن تطبيق أسلوب (مونت كارلو) ، وهو أسلوب احتمالي يقوم على تجربة الفرص المحتملة من خلال عينات عشوائية .

ويمكن تقسيم هذا الأسلوب إلى خمس خطوات بسيطة :

(١) عمل توزيع إحتمالي للمتغيرات الهامة في النظام .

(٢) إعداد توزيع إحتمالي متجمع .

(٣) تحديد ى مدى من الأرقام العشوائية لكل متغير .

(٤) توليد الأرقام العشوائية .

(٥) القيام بالمحاكاة لسلسلة من المحاولات .

إستخدام المحاكاة في تقدير حجم المبيعات لفترة زمنية قادمة

مثال (١)

بفرض أن أحد وكلاء إحدى شركات السلع المعمرة (الثلاجات) يريد أن يقدر حجم المبيعات خلال فترة زمنية قادمة ، ولتكن سنة قادمة ، باستخدام نظام المحاكاة ، ولتحقيق هذا الغرض أمكن الحصول على أرقام المبيعات خلال السنة الماضية للعمل (٣٠٠ يوم عمل) ، كما أمكن تلخيص هذه المبيعات في الجدول التالي :

عدد الثلاجات المباعة (س)	صفر	١	٢	٣	٤	٥
عدد الأيام (التكرار) (ك)	٣٠	٦٠	٦٠	٩٠	١٥	٤٥

والمطلوب تقدير المبيعات خلال (١٠) عشرة أيام قادمة ؟.

ملحوظة : يمكن إستخدام الأرقام العشوائية التالية المستخرجة من جدول الأرقام العشوائية :٠٧ ، ٦٠ ، ٧٧ ، ٤٩ ، ٧٦ ، ٩٥ ، ٥١ ، ١٦ ، ١٤ ، ٨٥

الحــل :

لحل هذا المثال نطبق الخطوات التالية :

(١) تحويل جدول التوزيع التكرارى إلى توزيع إحتمالي وذلك بقسمة كل تكرار ÷ مجموع التكرارات (٣٠٠) ؛ فتكون على الترتيب :

$\frac{٣٠}{٣٠٠} = ٠,١٠$ $\frac{٦٠}{٣٠٠} = ٠,٢٠$ $\frac{٦٠}{٣٠٠} = ٠,٢٠$

$\frac{٩٠}{٣٠٠} = ٠,٣٠$ $\frac{١٥}{٣٠٠} = ٠,٠٥$ $\frac{٤٥}{٣٠٠} = ٠,١٥$

(٢) إيجاد الإحتمال المتجمع الصاعد بتجميع الإحتمالات السابقة (التي تسبق النقطة موضع التجميع)

(٣) تخصيص الأرقام العشوائية حسب قيم الإحتمال المتجمع

ويمكن تكوين الجدول التالي :

عدد الثلاجات المباعة (س)	عدد الأيام (التكرار) (ك)	الإحتمال (ح)	الإحتمال المتجمع	الأرقام العشوائية المستخرجة(المنتجة)
صفر	٣٠	٠,١٠	٠,١٠	من ٠٠: ٠٩
١	٦٠	٠,٢٠	٠,٣٠	من ١٠: ٢٩
٢	٦٠	٠,٢٠	٠,٥٠	من ٣٠: ٤٩
٣	٩٠	٠,٣٠	٠,٨٠	من ٥٠: ٧٩
٤	١٥	٠,٠٥	٠,٨٥	من ٨٠: ٨٤
٥	٤٥	٠,١٥	١,٠٠	من ٨٥: ٩٩
المجموع	٣٠٠	١,٠٠		

(٤) بعد تخصيص الأرقام العشوائية حسب قيم الإحتمال المجمع من الجدول السابق ، يتم ترجمة الأرقام العشوائية المستخرجة حسب كل رقم يقع في أي فئة في عمود الأرقام العشوائية المخصصة :

فمثلاً : ٠٧ يقع في الفئة [٠٠ : ٠٩] والتي يقابلها صفر ثلاجة مباعة

٦٠ يقع في الفئة [٥٠ : ٧٩] والتي يقابلها ٣ ثلاجات مباعة

٧٧ يقع في الفئة [٥٠ : ٧٩] والتي يقابلها ٣ ثلاجات مباعة

٤٩ يقع في الفئة [٣٠ : ٤٩] والتي يقابلها ٢ ثلاجة مباعة

وهكذا ، ٠٠٠٠٠

وعلى ذلك يمكن تصوير الجدول التالي :

الأرقام العشوائية المستخرجة	عدد الثلاجات المباعة
٠٧	صفر
٦٠	٣
٧٧	٣
٤٩	٢
٧٦	٣
٩٥	٥
٥١	٣
١٦	١
١٤	١
٨٥	٥
المجمـــــوع	٢٦

وعلى ذلك يكون متوسط عدد الثلاجات المباعة عن العشرة أيام القادمة من واقع نظام المحاكاة هو :

= $\frac{٢٦}{١٠}$ = ٢,٦ ثلاجة .

ونلاحظ أنه كلما زاد عدد أيام المحاكاة (عدد مفردات العينة) كلما قربت القيم المتوقعة من القيم الفعلية ، والقيم المتوقعة هنا هي عبارة عن مجموع حواصل ضرب كل رقم (عدد الثلاجات) × الإحتمال الخاص به

القيمة المتوقعة = (صفر× ٠,١٠) + (١ × ٠,٢٠) + (٢ × ٠,٢٠)

+ (٣ × ٠,٣) (٤ × ٠,٠٥) + (٥ × ٠,١٥)

= صفر + ٠,٢ + ٠,٤ + ٠,٩ + ٠,٢ +٠,٧٥ = ٢,٤٥ ثلاجة

وكما سبق أن أوضحنا ، فإنه كلما زاد عدد أيام المحاكاة كلما إقترب الرقمان السابقان من بعضهما .

مثال (٢)

فيما يلي متوسط وقت أداء الخدمة بإحدى الورش لإصلاح السيارات والإحتمالات الخاصة بها :

متوسط الزمن بالدقائق	الإحتمال
١٥	٠,٢٠
٣٠	٠,٤٠
٦٠	٠,٣٠
١٢٠	٠,١٠

المطلوب إجراء المحاكاة بالنسبة لعشرة حالات لإصلاح السيارات ، بفرض أن الأرقام العشوائية المستخرجة هي :

٧٨ ، ٢٨ ، ٠٨ ، ٠٢ ، ٢٣ ، ٥٤ ، ٥٧ ، ٠٠ ، ٨٤ ، ٩٥

الحــل :

يتم تكوين الجدول التالي :

متوسط الزمن بالدقائق	الإحتمال (ح)	الإحتمال المتجمع	الأرقام العشوائية
١٥	٠,٢٠	٠,٢٠	من ٠٠ : ٠٩
٣٠	٠,٤٠	٠,٦٠	من ٢٠ : ٥٩
٦٠	٠,٣٠	٠,٩٠	من ٦٠ : ٨٩
١٢٠	٠,١٠	١,٠٠	من ٩٠ : ٩٩

بعد تخصيص الأرقام العشوائية حسب قيم الإحتمال المتجمع من الجدول السابق ، يتم ترجمة الأرقام العشوائية المستخرجة (أو المنتجة) حسب كل رقم يقع في أي فئة في عمود الأرقام العشوائية المخصصة وتحديد الزمن المقابل كما يلي :

الأرقام العشوائية المستخرجة (أو المنتجة)	الزمن بالدقائق
٧٨	٦٠
٢٨	٣٠
٠٨	١٥
٠٢	١٥
٢٣	٣٠
٥٤	٣٠
٥٧	٣٠
٠٠	١٥
٨٤	٦٠
٩٥	١٢٠

وعلى ذلك يكون متوسط الزمن بالدقائق عن العشرة حالات من إصلاح السيارات من واقع نظام المحاكاة هو :

= (٦٠ + ٣٠ + ١٥ ÷ ١٥ + ٣٠ + ٣٠ + ٣٠ + ١٥ + ٦٠ – ١٢٠) / ١٠

= ٤٠٥ / ١٠ = ٤٠,٥ دقيقة .

∴ القيمة المتوقعة

= (١٥×٠,٢) + (٣٠×٠,٤) + (٦٠ × ٠,٣) + (١٢٠ × ٠,١)

∴ القيمة المتوقعة = ٣ + ١٢ + ١٨ + ١٢ = ٤٥ دقيقة .

إستخدام المحاكاة في الرقابة على المخزون السلعي :

إن التخطيط الجيد لإحتياجات المشروع من الأصناف المخزونه يمثل أمراً بالغ الأهميه ، حيث أن زيادة حجم المخزون عن الحاجه تعنى تقييد جانب من الأموال من الممكن إستثمارها فى مجالات أخرى ، وبالمثل فإن نقص المخزون عن الحاجه يترتب عليه ضياع فرص الحصول على الأرباح .

وتهدف الرقابه على المخزون إلى تصميم الطرق والوسائل التى تكفل التحقق من أن تصرفات الإداره فى الحصول على المواد الخام المستخدمه فى عملية التحول والتشغيل إلى مُنتجات تامه تتم وفقاً لخطه مستهدفه ، وينبغى الإنتفاع بموارد المشروع لأقصى حد ممكن وبما يضمن إستمرار عملية الإنتاج

ويتمثل الهدف الرقابى بالمشروعات الإنتاجيه فى الآتى : -

(١) تحديد الإستثمار فى المخزون من المواد فى أدنى مستوى له ... تحجيماً لرأس المال المجمد دون استثمار وضياع فرص إستثماريه أخرى ناتجه عن إستخدامه بما يُدر عوائد مجزيه للمشروع .

(٢) تحديد الإستثمار فى المخزون من المواد بالقدر الكافي الذى يحافظ على استمرار تدفق المواد لتغذية الخطوط الإنتاجيه باحتياجاتها فى الوقت المناسب وبالجوده المناسبه حتى لايتعطل دولاب الإنتاج .

وقد يبدو لأول وهله وجود تعارض بين الهدفين المذكورين ، فالمحافظه على عدم توقف الإنتاج يتطلب زيادة المخزون وتجميد رأس المال ، والرغبه فى تخفيض تكلفة رأس المال المستثمر يتطلب تخفيض المخزون إلى أدنى مستوى له .

وهذا يتطلب من الإدارة الناجحه أن توازن بين تكاليف التخزين فى حالة الإحتفاظ بمخزون أكبر من اللازم ، وبين التكاليف التى يتحملها المشروع نتيجة إذا كان المخزون أقل من اللازم ، ومن ثمَّ تعرُض الإنتاج للتوقف نتيجه لذلك .

وبناءاً على ما تقدم يتضح أهمية الإستعانه بالأساليب الكميه فى تطوير الرقابه على المخزون السلعي ، ويجب أن نعلم أن لفظ المخزون يشير إلى الكميات التى يحتفظ بها المشروع من الأصناف المختلفه ، وذلك بهدف إستخدامها فى المستقبل أو عند الحاجه إليها (مواد خام ، مواد نصف مُصنعه ، بضاعه تحت التشغيل ، منتجات تامة الصنع ومعده للبيع ، أدوات ومهمات ، ... إلخ) .

وتُستخدم الأساليب الكميه فى تطوير الهدف الرقابي من خلال الموضوعات التاليه : -

(١) كيفية تحديد الكميه الإقتصاديه للطلب .
(٢) علاقة الكميه الإقتصاديه للطلب بتحديد مستويات المخزون .
(٣) علاقة الكميه الإقتصاديه بخصم الكميه .
(٤) تحديد الحد الأدنى لمخزون الأمان الأمثل والذى يحقق أدنى تكلفة ممكنه .

ونتناول فيما يلي هذه الموضوعات بالتحليل والدراسة من الناحية الكمية بشئ من التفصيل .

تحديد الكميه الإقتصاديه للطلب :

قد يجابه مُدير المشتريات بحتمية إختيار سياسه شرائيه معينه من بين السياسات الشرائيه البديله المتاحه . فقد يتبع سياسة شراء الطلب السنوى (إحتياجات المشروع السنويه) دفعه واحده ، أو يتبع سياسة شراء الإحتياجات على عدة دفعات خلال السنه الواحده .

ويوجد الكثير من المتغيرات التى تحكم عملية إختيار سياسه شرائيه دون إخرى ، فاختيار السياسه الأولى (الدفعه الواحده) قد يحكمها مدى توافر التمويل اللازم ومقدار الخصم النقدى وخصم الكميه التى يحصل عليه المشروع كما يحكم إختيار السياسه الثانيه (دفعات خلال السنه الواحده) صعوبة توفير التمويل اللازم دفعةً واحده ، وبالتالى ضياع فرصة حصول المشروع على الخصم اللازم .

ويرى البعض أن تحديد أفضل كميه إقتصاديه للطلب تكون عند تعادل تكاليف التخزين مع تكاليف عدد أوامر الشراء المصدره خلال العام (تكاليف إصدار الطلبيات) . ويمكن صياغة تلك العلاقه فى شكل معادله رياضيه على النحو التالي :-

- تكاليف التخزين = تكاليف إصدار الطلبيه

ويُقصد بتكاليف التخزين :

- متوسط كمية التخزين × تكلفة تخزين الوحده

حيث :

$$\text{متوسط كمية التخزين} = \frac{\text{الكميه الإقتصاديه للطلب}}{٢}$$

وإذا رمزنا للكميه الإقتصاديه للطلب بالرمز ك ، ورمزنا لتكلفة تخزين الوحده بالرمز ز فإن : –

♦ تكاليف التخزين = $\frac{ك}{٢} \times ز$

ويتضح وجود علاقه طرديه بين كمية المخزون وتكاليف التخزين ، فإذا زادت الأولى زادت الثانيه والعكس صحيح .

♦ ويُقصد بتكاليف الطلبيه :

كافة التكاليف التى تنفقها الإدارات المختلفه بالمشروع على الصفقات والطلبيات التى تعقدها مع الموردين من وقت الشعور بالحاجه حتى وقت وصولها . ويتضح وجود علاقه عكسيه بين كمية الطلب وتكلفة الحصول على الطلبيه .

تكاليف إصدار الطلبيات =

= عدد مرات الطلب خلال العام × تكلفة إصدار الطلبيه الواحده

فإذا رمزنا لعدد مرات الطلب خلال العام بالرمز م ، حيث :

$$\text{عدد مرات الطلب خلال السنة} = \frac{\text{الطلب السنوى}}{\text{الكميه الإقتصاديه للطلب}}$$

$$\therefore م = \frac{ط}{ك}$$

وإذا رمزنا أيضاً لتكاليف إصدار الطلبيه الواحده بالرمز ت يكون :

♦ تكلفة إصدار الطلبيات = م × ت

$\therefore$ تكلفة إصدار الطلبيات= $\frac{ط}{ك} \times ت$

♦ ويُقصد أيضاً بمدة التوريد ، (فترة التوريد) :

هى عباره عن الفتره التى تنقضى بين إصدار أمر التوريد ووقت وصول الطلبيه إلى المخازن ، وسنرمز لها بالرمز ف .

** ويُقصد أيضاً بمعدل الإستهلاك اليومي :

هو متوسط الكميات المسحوبه من المخازن يومياً طوال السنه . وسنرمز له بالرمز هـ .

** ويُقصد بتكاليف نفاذ المخزون :

هى جميع التكاليف التى ترتبط إرتباطاً مباشراً بعدم توافر الكميات المطلوبه من المواد ، المواد تحت التشغيل ، أو السلع تامة الصنع . ومن أمثلة تلك التكاليف نفقات توقف الخط الإنتاجى نتيجة عدم كفاية المواد الخام ، وكذلك الأرباح التى يفقدها المشروع نتيجة عدم وجود مخزون كاف من السلع تامة الصنع ... إلخ . وسنرمز لتلك التكاليف بالرمز س .

ولتحديد الكمية الإقتصادية للطلب يجب أن تتعادل تكلفة التخزين مع تكلفة إصدار الطلبيات .

أي أن : $\frac{ك}{٢} \times ز = \frac{ط}{ك} \times ت$ ، حيث ت تكلفة إصدار الطلبية الواحدة

وبالضرب × ك $\therefore \frac{ك^{٢}}{٢} \times ز = ط \times ت$

وبالضرب × $\frac{٢}{ز}$ $\therefore ك^{٢} = \frac{٢ ط ت}{ز}$

♦ $\therefore$ الكمية الإقتصادية للطلب = $ك = \sqrt{ك^{٢}} = \sqrt{\frac{٢ ط ت}{ز}}$

مثال (٣)

إذا إتضحت لك البيانات التاليه ، فاوجد الكميه الإقتصاديه للطلب :

(١) كمية الطلب السنوى (الإحتياجات السنويه) هى ٨٠٠٠ وحده ، تُستهلك بمعدل ثابت سنوياً

(٢) تكلفة شراء الوحده = ١ (جنيه واحد) .

(٣) تكلفة أمر الشراء الواحد (تكاليف إصدار الطلبيه) = ١٢,٥ جنيه

(٤) تكلفة التخزين للوحده الواحده = ٢٠ ٪ من تكلفة شراء الوحده .

الحـــل

يتطلب الحل مبدئياً الوصول إلى تحديد الكميه الإقتصاديه للطلب بحيث يكون تكاليف التخزين = تكاليف إصدار الطلبيات .

وذلك على النحو التالى :

البيان	١	٢	٤	٦	٨	١٠	م : عـــدد مرات الطلب
	٨٠٠٠	٤٠٠٠	٢٠٠٠	١٥٠٠	١٠٠٠	٨٠٠	ك : الكميه الإقتصاديه للطلب
متوسط كمية المخزون	٤٠٠٠	٢٠٠٠	١٠٠٠	٧٥٠	٥٠٠	٤٠٠	$\frac{ك}{٢}$
تكلفة التخزين ز = ٠,٢٠	٨٠٠	٤٠٠	٢٠٠	١٥٠	١٠٠	٨٠	$\frac{ك}{٢} \times ز$
تكاليف إصدار الطلبيه ت = ١٢,٥	١٢,٥	٢٥	٥٠	٧٥	١٠٠	١٢٥	م × ت
إجمالى التكاليف	٨١٢,٥	٤٢٥	٢٥٠	٢٢٥	٢٠٠	٢٠٥	ز + ت

ويتضح من الجدول السابق أن الكميه الإقتصاديه للطلب ك المثلى هى ١٠٠٠ وحده ، وأن عدد مرات الطلب = ٨ مرات لتوفير الإحتياجات سنويه بإجمالى تكلفه = ٢٠٠ جنيه . حيث أنها تمثل أدنى إجمالى التكاليف . بالإضافه إلى تعادل تكلفة التخزين وتكلفة إصدار الطلبيات .

وعلى ذلك ، فإن تحديد الكميه الإقتصاديه للطلب ك تتحدد طبقاً للعلاقه التاليه :

تكاليف التخزين = تكاليف إصدار الطلبيات

$$\therefore \frac{ك}{٢} \times ز = \frac{ط}{ك} \times ت$$

. حيث (ت) تكلفة إصدار الطلبية الواحدة

بالضرب × ك

$$\therefore \frac{ك^{٢}}{٢} \times ز = ط \times ت$$

بالضرب × $\frac{٢}{ز}$

$$\therefore ك^{٢} = \frac{٢ ط ت}{ز}$$

$$\therefore \text{الكمية الإقتصادية للطلب} = ك = \sqrt{ك^{٢}} = \sqrt{\frac{٢ ط ت}{ز}}$$

من المثال السابق نجد أن :

$$\therefore \text{الكمية الإقتصادية للطلب} = ك = \sqrt{\frac{٢ \times ٨٠٠٠ \times ١٢,٥}{٠,٢٠}}$$

= ١٠٠٠ وحدة .

مثال (٤)

إذا إتضحت لك البيانات التاليه :

١ - كمية الإحتياجات السنويه =١٨٠٠ وحده ٢- تكلفة اصدار أمر الشراء الواحد = ١٠٠ جنيه ٣- تكلفة التخزين للوحده الواحده سنوياً = ٤ جنيهات . والمطلوب إيجاد الكميه الإقتصاديه للشراء ؟ .

الحــل :

من البيانات نجد أن : ط = ١٨٠٠ وحدة ، ت = ١٠٠ ج ، ز = ٤ ج

$$\therefore \text{الكمية الإقتصادية للطلب} = ك = \sqrt{\frac{٢ \text{ ط ت}}{ز}}$$

$$\therefore \text{الكمية الإقتصادية للطلب} = ك = \sqrt{\frac{٢ \times ١٨٠٠ \times ١٠٠}{٤}} = ٣٠٠ \text{ وحدة .}$$

مثال (٥)

إذا كانت الإحتياجات السنوية (الطلب السنوي) = ٣٠٠٠ وحدة ، وكانت تكلفة الطلبية الواحدة = ١٠٠٠ جنيه ، وتخزين الوحدة سنوياً تكلفها (٢٤) جنيه . ماهو عدد وحدات الطلبية الواحدة (الكمية الإقتصادية للطلب) ؟.

الحــل :

من البيانات نجد أن : ط = ٣٠٠٠ وحدة ، ت = ١٠٠٠ ج ، ز = ٢٤ ج

$$\therefore \text{الكمية الإقتصادية للطلب} = ك = \sqrt{\frac{٢ \text{ ط ت}}{ز}}$$

$$\therefore \text{الكمية الإقتصادية للطلب} = ك = \sqrt{\frac{٢ \times ٣٠٠٠ \times ١٠٠٠}{٢٤}}$$

= ٥٠٠ وحدة .

تحديد مستويات المخزون

إن نقطة البدء لرقابة المخزون هو تحديد مستويات المخزون السلعى بحيث تشتمل على :

(١) مخزون الأمان :

وهو المستوى الذى لايجب أن يقل عنه المخزون من المواد ، وهو الحد الأدنى لمواجهة الظروف الطارئه ، بحيث لايتوقف الإنتاج بسبب نفاذ الكميه للمخزون ، وسنرمز له بالرمز خ

(٢) نقطة (مستوى) إعادة الطلب :

وهو كمية المخزون التى يجب عندها إصدار أمر الشراء لتوفير كميه جديده من الصنف موضع البحث ، أي هو المستوى الذى إذا وصل إليه المخزون من المواد نبدأ مباشرةً فى إجراءات طلب كميات من المواد (الكميه الإقتصاديه المثلى للطلبيه) ، ويتوقف حجم مخزون إعادة الطلب على عدة عوامل من أهمها ، معدل الإستخدام أو السحب (معدل الإستهلاك) اليومى هـ ، وطول فترة التوريد ف ، وسنرمز لمستوى إعادة الطلب بالرمز ن

(٣) الحد الأقصى للمخزون :

وهو المستوى الذى لاينبغى أن يزيد عنه المخزون من أى ماده ، والهدف من تحديد هذا الحد الأقصى هو الحد من الإسراف فى استثمار أموال المشروع دون وجود ما يبرر ذلك .

ويمكن إحتساب نقطة (مستوى) إعادة الطلب على النحو التالى : -

مستوى إعادة الطلب ن = فترة التوريد ف × معدل الإستخدام اليومى هـ

** ففي حالة ما إذا كان مخزون الأمان = صفر ، يكون :

ن = ف × هـ

** أما إذا كان مخزون الأمان أكبر من الصفر ، يكون :

ن = (ف × هـ) + خ

كما يمكن حساب الحد الأقصى للمخزون كما يلي : -

∴ الحد الأقصى = مخزون الأمان + الكميه الإقتصاديه للطلب

= خ + ك

مثال (٦)

إذا إتضحت لك البيانات التاليه :

١- كمية الطلب السنوي هى ١٢٠٠٠ وحده .

٢- متوسط الإستخدام اليومى = ٤٠ وحده .

٣- تكلفة التخزين للوحده الواحده سنوياً = ٠,٢٤ جنيه .

٤- فترة التوريد = ٤ أيام .

٥- تكلفة الطلب الواحد = ٢ جنيه .

٦- مخزون الأمان = ١٠ وحدات .

والمطلوب تحديد مايلى :

١ - الحجم الأمثل لكمية الشراء (الكميه الإقتصاديه للطلب) ؟.

٢ - مستوى إعادة الطلب ؟.

٣ - الحد الأقصى للتخزين ؟ .

٤ - التكاليف الكليه للطلب ؟ .

الحـــل :

١ - الحجم الأمثل لكمية الشراء (الكميه الإقتصاديه للطلب) :

∵ ط = ١٢٠٠٠ وحدة ، ت = ٢ ج ، ز = ٠,٢٤ ج

∵ الكمية الإقتصادية للطلب = ك = $\sqrt{\frac{٢ ط ت}{ز}}$

∴ الكمية الإقتصادية للطلب = ك = $\sqrt{\frac{٢ \times ١٢٠٠٠ \times ٢}{٠,٢٤}}$

= ٤٤٧ وحدة .

٢ - نقطة إعادة الطلب :

ن = (ف × هـ) + خ

= (٤ × ٤٠) + ١٠ = ١٦٠ + ١٠ = ١٧٠ وحده .

٣ -الحد الأقصى للتخزين = مخزون الأمان + الكميه الإقتصاديه للطلب

= خ + ك

= ١٠ + ٤٤٧

= ٤٥٧ وحده .

٤ -التكاليف الكليه للطلب = تكاليف التخزين + تكاليف إصدار الطلبيات

= $\frac{ك}{٢}$ × ز + $\frac{ط}{ك}$ × ت

= $\frac{٤٤٧}{٢}$ × ٠,٢٤ + $\frac{١٢٠٠٠}{٤٤٧}$ × ٢

= ٥٣,٦٤ + ٥٣,٦٩

= ١٠٧,٣٣ جنيه .

مثال (٧)

بفرض توافر البيانات التاليه :

١- كمية الإحتياحات السنويه هى ٢٠٠٠٠ وحده ،

٢- تكلفة إصدار الطلبيه = ٨ جنيه ،

٣- تكلفة التخزين للوحده الواحده سنوياً = ٠,٠٢ جنيه ،

٤- فترة التوريد = ٦ أيام ،

٥-عدد أيام العمل فى السنه = ٣٠٠ يوم ،

٦- مخزون الأمان = ١٠٠٠ وحده ،

والمطلوب تحديد مايلى :

١ - الكميه الإقتصاديه للطلب ؟،

٢ - نقطة إعادة الطلب ؟،

٣ - الحد الأقصى للتخزين ؟ ،

٤ - التكاليف الكليه للطلب ؟ ،

الحـــل :

١ - الكميه الإقتصاديه للطلب :

من بيانات المثال نجد أن :

ط = ٢٠٠٠٠ وحدة　، ت = ٨ ج　، ز = ٠,٠٢ ج

∴ الكمية الإقتصادية للطلب = ك = $\sqrt{\frac{٢ \text{ ط ت}}{\text{ز}}}$

∴ الكمية الإقتصادية للطلب = ك = $\sqrt{\frac{٢ \times ٢٠٠٠٠ \times ٨}{٠,٠٢}}$ = ٤٠٠٠ وحدة ،

٢ - نقطة إعادة الطلب :

ن = (ف × هـ) + خ

=(٦ × ٦٦,٧) + ١٠٠٠

= ٤٠٠ + ١٠٠٠ = ١٤٠٠ وحده .

حيث :

$$\text{هـ} = \text{الإستهلاك اليومى} = \frac{\text{الطلب السنوى}}{\text{عدد أيام العمل فى السنه}}$$

$$\therefore \text{هـ} = \frac{٢٠٠٠٠}{٣٠٠} = ٦٦,٧ \text{ وحده تقريباً .}$$

٣ - الحد الأقصى للتخزين = مخزون الأمان + الكميه الإقتصاديه للطلب

= خ - ك

= ١٠٠٠ + ٤٠٠٠

= ٥٠٠٠ وحده .

٤ - التكاليف الكليه للطلب = تكاليف التخزين + تكاليف إصدار الطلبيات

$$= \frac{\text{ك}}{٢} \times \text{ز} - \frac{\text{ط}}{\text{ك}} \times \text{ت}$$

$$= \frac{٤٠٠٠}{٢} \times ٠,٠٢ + \frac{٢٠٠٠٠}{٤٠٠٠} \times ٨$$

= ٤٠ + ٤٠

= ٨٠ جنيه .

مثال (٨)

بفرض أن حجم الطلب على سلعة معينة عن (٦٠٠) يوم على النحو التالي :

حجم الطلب	صفر	١	٢	٣	٤	٥
التكرار	٣٠	٦٠	١٢٠	٢٤٠	٩٠	٦٠

والمطلوب محاكاة الطلب عن عشرة (١٠) أيام قادمة مستخدماً الأرقام العشوائية التالية : ٣٧ ، ١٣، ٨٨، ٣٢، ٥١، ١٨، ٧٥، ٦٢، ٠٣، ٢٥

الحـــل :

لمحاكاة الطلب نمر بالخطوات السابق إيضاحها على النحو التالي :

يتم تحويل جدول التوزيع التكرارى إلى جدول توزيع إحتمالي بقسمة كل تكرار ÷ مجموع التكرارات (٦٠٠) ، ثم نوجد الإحتمال المتجمع الصاعد ، ومن ثم يتم تخصيص الأرقام العشوائية حسب قيم الإحتمال المجمع ٠

ومن هنا يمكن تكوين الجدول التالي :

حجم الطلب	عدد الأيام (التكرار) (ك)	الإحتمال (ح)	الإحتمال المتجمع	الأرقام العشوائية
صفر	٣٠	٠,٠٥	٠,٠٥	من ٠٠ : ٠٤
١	٦٠	٠,١٠	٠,١٥	من ٠٥ : ١٤
٢	١٢٠	٠,٢٠	٠,٣٥	من ١٥ : ٣٤
٣	٢٤٠	٠,٤٠	٠,٧٥	من ٣٥ : ٧٤
٤	٩٠	٠,١٥	٠,٩٠	من ٧٥ : ٨٩
٥	٦٠	٠,١٠	١,٠٠	من ٩٠ : ٩٩
المجموع	٦٠٠	١,٠٠	---	----

ولمحاكاة الطلب عن عشرة (١٠) أيام قادمة يتم ترجمة الأرقام العشوائية المنتجة في الجدول السابق إلى أرقام لحجم الطلب عن العشرة أيام المقبلة ، ووضع النتائج في جدول على النحو التالي :

الأرقام العشوائية المستخرجة (أو المنتجة)	حجم الطلب
٣٧	٣
١٣	١
٨٨	٤
٣٢	٢
٥١	٣
١٨	٢
٧٥	٤
٦٢	٣
٠٣	صفر
٢٥	٢

وعلى ذلك يكون متوسط الطلب اليومي عن العشرة أيام القادمة من واقع نظام المحاكاة هو :

$$= \frac{٣+١+٤+٢+٣+٢+٤+٣+ \text{صفر} +٢}{١٠}$$

$$= \frac{٢٤}{١٠} = ٢,٤$$ وحدة يومياً .وهي التي يتم مقارنتها بالقيمة المتوقعه ، حيث :

القيمة المتوقعة = (صفر× ٠,٠٥) + (١ × ٠,١) + (٢ × ٠,٢) + (٣ × ٠,٤) (٤ × ٠,١٥) + (٥ × ٠,١)

∴ القيمة المتوقعة = صفر + ٠,١ + ٠,٤ + ١,٢ + ٠,٦ +٠,٥

= ٢,٨ وحدة يومياً .

وبفرض أنه من واقع الخبرة الماضية تم التوصل إلى النتائج التالية عن (١٠٠) طلبية :

١-

وقت الطلبية (باليوم)	١	٢	٣	٤
عدد الأيام (التكرار)	٤٠	٣٠	٢٠	١٠

٢- تستخدم الأرقام العشوائية التالية :

١٧ ، ٣٥، ٣٢ ، ٥١ ، ٦٨ ، ٦٢، ٥٥، ٧٤ ، ٤١ ، ٩٨

٣- أن حجم الطلبية الواحدة = (٨) وحدات

٤- وأن نقطة إعادة الطلب = (٤) وحدات

٥- تكلفة الطلبية الواحدة = ٢٠ جنيه

٦- تكلفة التخزين للوحدة = (جنيه واحد) سنوياً.

٧- تكلفة نفاد المخزون (الربح الضائع نتيجة عدم وجود بضاعة) = ٩ جنيه

والمطلوب إيجاد :

(١) متوسط المخزون آخر كل يوم؟.

(٢) متوسط عدد وحدات المبيعات الضائعة ؟.

(٣) متوسط عدد الطلبيات لليوم الواحد؟.

(٤) متوسط تكلفة التخزين يومياً ؟.

(٥) متوسط تكلفة نفاد المخزون ؟.

(٦) تكلفة الطلبية لليوم الواحد؟.

(٧) التكلفة الإجمالية ؟.

الحـــل :

يتم تحويل جدول التوزيع التكرارى إلى جدول توزيع إحتمالي ، ثم نوجد الإحتمال المتجمع الصاعد ، ومن ثم يتم تخصيص الأرقام العشوائية حسب قيم الإحتمال المجمع كما يلي :

وقت الطلبية باليوم	عدد الأيام (التكرار) (ك)	الإحتمال (ح)	الإحتمال المتجمع	الأرقام العشوائية
١	٤٠	٠,٤٠	٠,٤٠	من ٠٠ : ٣٩
٢	٣٠	٠,٣٠	٠,٧٠	من ٣٩ : ٦٩
٣	٢٠	٠,٢٠	٠,٩٠	من ٦٩ : ٨٩
٤	١٠	٠,١٠	١,٠٠	من ٩٠ : ٩٩
المجموع	١٠٠	١,٠٠	---	----

ولتحقيق المطلوب في هذا المثال نكون الجدول التالي :

الأيام	الوحدات الواردة	المخزون أول كل يوم	الطلب من واقع المحاكاة	رصيد آخر كل يوم	المبيعات الضائعة	إصدار أمر	الرقم العشوائي	الوقت اللازم لوصول الطلبية
١	صفر	٨	٣	٥	صفر	لا	١٧	
٢	صفر	٥	١	٤	صفر	نعم	٣٥	١
٣	صفر	٤	٤	صفر	صفر	لا	٣٢	
٤	٨	٨	٢	٦	صفر	لا	٥١	
٥	صفر	٦	٣	٣	صفر	نعم	٦٨	٢
٦	صفر	٣	٢	١	صفر	لا	٦٢	
٧	صفر	١	٤	صفر	٣	لا	٥٥	
٨	٨	٨	٣	٥	٨	لا	٧٤	
٩	صفر	٥	صفر	٥	صفر	لا	٤١	
١٠	صفر	٥	٢	٣	صفر	نعم	٩٨	٤
			٢٤	٣٢	٣			

وعلى ذلك يكون :

(١) متوسط المخزون آخر كل يوم = $\frac{٣٢}{١٠}$ = ٣,٢ وحدة .

(٢) متوسط عدد وحدات المبيعات الضائعة = $\frac{٣}{١٠}$ = ٠,٣ وحدة .

(٣) متوسط عدد الطلبيات لليوم الواحد = $\frac{٣}{١٠}$ = ٠,٣ وحدة .

(٤) متوسط تكلفة التخزين يومياً = ٣,٢ × ١ = ٣,٢ جنيه .

(٥) متوسط تكلفة نفاد المخزون

= الربح الضائع × متوسط عدد الوحدات التي لم يُتمكن من بيعها

= ٩ × ٠,٣ = ٢,٧ جنيه.

(٦) متوسط تكلفة الطلبية لليوم الواحد = ٠,٣ × ٢٠ = ٦ جنيهات .

(٧) متوسط التكلفة الإجمالية يومياً للطلبيات والتخزين والربح الضائع =

= ٦ + ٣,٢ + ٢,٧ = ١١,٩ جنيه .

مثال (٩)

شركة تفاضل بين نظامين للمخزون السلعي :

(١) النظام الأول : كمية الطلبية الواحدة = ٥٠ ، والحد الأدنى للطلب = ٣٠

(٢) النظام الثاني : كمية الطلبية الواحدة = ٤٥ ، والحد الأدنى للطلب = ٢٥

فإذا علمت أن :

[١] تكلفة التخزين للوحدة = (جنيه واحد) يومياً

[٢] تكلفة الطلبية الواحدة = ٢٠ جنيه

[٣] تكلفة نفاد المخزون (الربح الضائع نتيجة عدم وجود بضاعة) = ٥ جنيه

[٤] التوزيعات الإحتمالية للطلب اليومي والوقت اللازم لإنجاز الطلبية على النحو التالي :

حجم الطلب اليومي	الإحتمال	الوقت اللازم للطلبية	الإحتمال
١٠	٠,٢٠	١	٠,١٠
١١	٠,٥٠	٢	٠,٣٠
١٢	٠,٣٠	٣	٠,٦٠

والمطلوب :

إستخدم اسلوب المحاكاة في المفاضلة بين النظامين؟.

الحــل :

حيث أننا نرغب في المحاكاة للمفاضلة بين النظامين لمدة عشرة أيام ، فإننا نختار بطريقة عشوائية الأرقام من أي عمودين للأرقام العشوائية للأيام العشرة ، أو نستخدم الآلة الحاسبة . وبفرض أن الأرقام العشوائية هي :

٩٤ ، ١٦، ٧٣ ، ٤٦ ، ٢٠ ، ٩٩، ٣٥، ٠١ ، ١٧ ، ٣٢

ومن هنا يمكن تكوين الجدول التالي :

الأيام	الأرقام العشوائية المنتجة	الطلب من واقع المحاكاة
١	٩٤	١٢
٢	١٦	١٠
٣	٧٣	١٢
٤	٤٦	١١
٥	٢٠	١١
٦	٩٩	١٢
٧	٣٥	١١
٨	٠٣	١٠
٩	١٧	١٠
١٠	٣٢	١١
مجموع		١١٠

نوجد الإحتمال المتجمع الصاعد ، ومن ثم يتم تخصيص الأرقام العشوائية حسب قيم الإحتمال المجمع كما يلي :

الوقت اللازم للطلبية	الإحتمال (ح)	الإحتمال المتجمع	الأرقام العشوائية
١	٠,١٠	٠,١٠	من ٠٠ : ٠٩
٢	٠,٣٠	٠,٤٠	من ٠٩ : ٣٩
٣	٠,٦٠	١,٠٠	من ٤٠ : ٩٩
المجموع	١,٠٠	---	-----

وبالإعتماد على نظام المحاكاة لتقدير حجم الطلب للعشرة أيام فإنه :

بالنسبة للنظام الأول :

حيث أن حجم الطلبية الواحدة = ٥٠ وحدة ، ونقط إعادة الطلب (الحد الأدنى للطلبية) = ٣٠ وحدة ، فإن :

الأيام	الوحدات الواردة	المخزون أول كل يوم	الطلب من واقع المحاكاة	رصيد آخر كل يوم	المبيعات الضائعة	إصدار أمر	الرقم العشوائي	الوقت اللازم لوصول الطلبية
١	صفر	٥٠	١٢	٣٨	صفر	لا	٤١	
٢	صفر	٣٨	١٠	٢٨	صفر	نعم	٠٦	١
٣	صفر	٢٨	١٢	١٦	صفر	لا	٥٠	
٤	٥٠	٦٦	١١	٥٥	صفر	لا	١٥	
٥	صفر	٥٥	١١	٤٤	صفر	لا	٣٨	
٦	صفر	٤٤	١٢	٣٢	صفر	لا	٥١	
٧	صفر	٣٢	١١	٢١	صفر	نعم	٢٤	٢
٨	صفر	٢١	١٠	١١	صفر	لا	٦٩	
٩	صفر	١١	١٠	١	صفر	لا	٨٥	
١٠	٥٠	٥١	١١	٤٠	صفر	لا	٥٤	
	-----		١١٠	٢٨٦	صفر		-----	

حيث أن الأرقام العشوائية الخاصة بوقت الطلبية حسب الآلة الحاسب هي :
٤١ ، ٠٦ ، ٥٠ ، ١٥ ، ٣٨ ، ٥١، ٢٤ ، ٦٩ ، ٨٥ ، ٥٤

وعلى ذلك يكون :

(١) متوسط المخزون آخر كل يوم = $\frac{٢٨٦}{١٠}$ = ٢٨,٦ وحدة .

(٢) متوسط عدد وحدات المبيعات الضائعة =صفر .

(٣) متوسط عدد الطلبيات لليوم الواحد = $\frac{٢}{١٠}$ = ٠,٢ وحدة .

(٤) متوسط تكلفة الطلبية لليوم الواحد = ٠,٢ × ٢٠ = ٤ جنيهات .

(٥) متوسط تكلفة التخزين يومياً = ٢٨,٦ × ١ = ٢٨,٦ جنيه .

(٦) متوسط تكلفة نفاد المخزون = صفر

(٧) متوسط التكلفة الإجمالية = ٤ + ٢٨,٦ + صفر = ٣٢,٦ جنيه .

بالنسبة للنظام الثاني :

حيث أن حجم الطلبية الواحدة = ٤٥ وحدة ، ونقط إعادة الطلب (الحد الأدنى للطلبية) = ٢٥ وحدة ، فإن :

الأيام	الوحدات الواردة	المخزون أول كل يوم	الطلب من واقع المحاكاة	رصيد آخر كل يوم	المبيعات الضائعة	إصدار أمر	الرقم العشوائي	الوقت اللازم لوصول الطلبية
١	صفر	٤٥	١٢	٣٣	صفر	لا	٧٩	
٢	صفر	٣٣	١٠	٢٣	صفر	نعم	٠٩	١
٣	صفر	٢٣	١٢	١١	صفر	لا	١٤	
٤	٤٥	٥٦	١١	٤٥	صفر	لا	٣٨	
٥	صفر	٤٥	١١	٣٤	صفر	لا	٤٥	
٦	صفر	٣٤	١٢	٢٢	صفر	نعم	٣١	
٧	صفر	٢٢	١١	١٠	صفر	لا	٦٦	٢
٨	صفر	١١	١٠	١	صفر	لا	٢٦	
٩	صفر	٤٦	١٠	٣٦	صفر	لا	٨٩	
١٠	٤٥	٣٦	١١	٢٥	صفر	نعم	١٧	٢
-----			١١٠	٢٤١	صفر	-----		

حيث أن الأرقام العشوائية الخاصة بوقت الطلبية حسب الآلة الحاسبة هي :

٧٩ ، ٠٩ ، ١٤ ، ٣٨ ، ٤٥ ، ٢١ ، ٦٦ ، ٢٦ ، ٨٩ ، ١٧

وعلى ذلك يكون :

١. متوسط المخزون آخر كل يوم = $\frac{٢٤١}{١٠}$ = ٢٤,١ وحدة .

٢. متوسط عدد وحدات المبيعات الضائعة = صفر .

٣. متوسط عدد الطلبيات لليوم الواحد = $\frac{٣}{١٠}$ = ٠,٣ وحدة .

٤. متوسط تكلفة الطلبية لليوم الواحد = ٠,٣ × ٢٠ = ٦ جنيهات .

٥. متوسط تكلفة التخزين يومياً = ٢٤,١ × ١ = ٢٤,١ جنيه .

٦. متوسط تكلفة نفاد المخزون = صفر

٧. متوسط التكلفة الإجمالية = ٦ + ٢٤,١ + صفر = ٣٠,١ جنيه .

ومن هنا نلاحظ أن البديل الثاني أفضل من البديل الأول لأن التكلفة الإجمالية للمخزون السلعي أقل ، وبالتالي ، فإن البديل الثاني يحقق وفر مقداره :

٣٢,٦ - ٣٠,١ = ٢,٥ وحدة نقد

تمارين على نموذج المحاكاة

١) بفرض أن أحد وكلاء إحدى شركات السيارات يريد أن يقدر حجم المبيعات خلال فترة زمنية قادمة ، ولتكن سنة قادمة ، باستخدام نظام المحاكاة ، ولتحقيق هذا الغرض أمكن الحصول على أرقام المبيعات خلال فترة زمنية كافية في الماضي (١٥٠٠ يوم عمل) ، كما أمكن تلخيص هذه المبيعات في الجدول التالي :

عدد السيارات المباعة (س)	عدد الأيام (التكرار) (ك)
صفر	٧٥
١	٣٧٥
٢	٤٥٠
٣	٣٠٠
٤	٢٢٥
٥	٧٥
المجموع	١٥٠٠

والمطلوب :

تقدير المبيعات خلال (١٠) عشرة أيام قادمة ؟.

ملحوظة : يمكنك إستخدام الأرقام العشوائية التالية المستخرجة من جدول الأرقام العشوائية :

٧٨ ، ٢٨ ، ٠٨ ، ٠٢ ، ٢٣ ، ٥٤ ، ٥٧ ، ٠٠ ، ٨٤ ، ٩٥

٢) فيما يلي متوسط وقت أداء الخدمة بورشة محمد المفتي لإصلاح السيارات والإحتمالات الخاصة بها :

متوسط الزمن بالدقائق	الإحتمال
٧٥	٠,٢٠
١٥٠	٠,٤٠
٣٠٠	٠,٣٠
٦٠٠	٠,١٠

المطلوب إجراء المحاكاة بالنسبة لعشرة حالات لإصلاح السيارات ، بفرض أن الأرقام العشوائية المستخرجة هي :

٧٨ ، ٢٨ ، ٠٨ ، ٠٢ ، ٢٣ ، ٥٤ ، ٥٧ ، ٠٠ ، ٨٤ ، ٩٥

٣) بفرض أنه كانت التكاليف الخاصة بأحد المنشآت خلال ال (٢٠٠) شهر الماضية كما يلي :

التكاليف (س)	عدد الشهور (التكرار) (ك)
٢٥٠٠٠	٥
٢٦٠٠٠	٢٥
٢٧٠٠٠	٣٠
٢٨٠٠٠	٣٥
٢٩٠٠٠	٤٠
٣٠٠٠٠	٢٥
٣١٠٠٠	١٥
٣٢٠٠٠	١٠
٣٣٠٠٠	١٥
المجموع	٢٠٠

والمطلوب : محاكاة التكاليف خلال (١٠) عشرة شهور القادمة ؟.

ملحوظة : يمكنك إستخدام الأرقام العشوائية التالية المستخرجة من جدول الأرقام العشوائية :

٧١ ، ٧٣ ، ٦٦ ، ٨٩ ، ٦٣ ، ٥٤ ، ٣٨ ، ٠٤ ، ٠٠ ، ٠٣

٤) إذا كانت مبيعات توكيل طارق لسيارات خلال (٨٠) أسبوع على النحو التالي :

عدد السيارات المباعة	١	٢	٣	٤	٥	٦
عدد الأسابيع	٤	٢٤	١٦	١٦	١٢	٨

والمطلوب إستخدام الأرقام العشوائية التالية في محاكاة الطلب على سيارات التوكيل عن العشرين (٢٠) أسبوع القادمة :

٢٩ ، ٩٨، ٥٤، ٢٢، ٨٣، ٣٧، ٦٢، ٣٥، ٠٢، ٨٨

٤٩ ، ٥٧، ٣٨، ٧٣، ٣٢، ١٧، ٠٣، ٠٦، ٧٧، ٤٢

ثم أجب عن الأسئلة التالية :

١. إذا كان حجم المعروض من السيارات = ٤ سيارات أسبوعياً بصفة دائمة ، فما هو عدد المرات التي يعجز فيها التوكيل عن تلبية الطلبات ؟

٢. بفرض عدم إستخدام أسلوب للمحاكاة لتقدير حجم الطلب على السيارات ما هو متوسط حجم المبيعات المتوقع عن الأسبوع الواحد ؟.

٥) إذا كانت الإحتياجات السنوية (الطلب السنوي) = ٦٠٠٠ وحدة ، وكانت تكلفة الطلبية الواحدة = ٢٠٠٠ جنيه ، وتخزين الوحدة سنوياً تكلفها (٤٨) جنيه . ماهو عدد وحدات الطلبية الواحدة (الكمية الإقتصادية للطلب) ؟.

٦) بفرض أن حجم الطلب على سلعة معينة عن (١٠٠٠) يوم على النحو التالي :

حجم الطلب	صفر	١	٢	٣	٤	٥
التكرار	١٣٠	١٦٠	٢٢٠	٢٤٠	٩٠	١٦٠

والمطلوب محاكاة الطلب عن عشرة (١٠) أيام قادمة مستخدماً الأرقام العشوائية التالية : ١٣ ، ٨٨، ٥١، ٣٢، ٢٥، ٠٣، ٦٢، ٧٥، ١٨، ٣٧

وبفرض أن حجم الطلبية الواحدة = (١٦) وحدة ، وأن نقطة إعادة الطلب = (٨) وحدات ، وتكلفة الطلبية الواحدة = ٢٠ جنيه ، وتكلفة التخزين للوحدة = (١,٥ جنيه) سنوياً ، تكلفة نفاد المخزون (الربح الضائع نتيجة عدم وجود بضاعة) = ١٠ جنيه ، والمطلوب إيجاد :

١- متوسط المخزون آخر كل يوم ٢- متوسط عدد وحدات المبيعات الضائعة

٣- متوسط عدد الطلبيات لليوم الواحد؟. ٤- متوسط تكلفة التخزين يومياً

٥- متوسط تكلفة نفاد المخزون ؟. ٦- تكلفة الطلبية لليوم الواحد؟.

٧- التكلفة الإجمالية ؟.

علماً بأنه من واقع الخبرة الماضية تم التوصل للنتائج التالية عن ١٠٠ طلبية

وقت الطلبية	١	٢	٣	٤
عدد الأيام	٤٠	٣٠	٢٠	١٠

يمكنك استخدام الأرقام العشوائية التالية :

٧١ ، ٧٣ ، ٦٦ ، ٨٩ ، ٦٣ ، ٥٤ ، ٣٨ ، ٩ ، ٠٠ ، ٣

٨) يوضح الجدول التالي الطلب اليومي على إطارات السيارات لأحد الشركات خلال المائتي يوم الماضية :

الطلب على الإطارات	صفر	١	٢	٣	٤	٥
تكرار الطلب	١٠	٢٠	٤٠	٦٠	٤٠	٣٠

والمطلوب محاكاة الطلب عن العشرة أيام القادمة مستخدماً الأرقام العشوائية التالية : ١٢ ، ٨٠، ٢، ٣٦، ٩٥، ٨٦، ٤٢، ٤٠، ٢٠، ٦٢

ثم أوجد القيمة المتوقعة للطلب؟

٩) إذا كان الطلب على أحد المنتجات عن ٣٠٠ يوم على النحو التالي :

حجم الطلب	صفر	١	٢	٣	٤	٥
تكرار الطلب	١٥	٣٠	٦٠	١٢	٤٥	٢٠

والمطلوب محاكاة الطلب عن العشرة أيام القادمة مستخدماً الأرقام العشوائية التالية : ٦ ، ٦٣، ٥٧، ٩٤، ٥٢، ٦٩، ٣٢، ٣٠، ٤٨، ٨٨

وبفرض أن حجم الطلبية الواحدة ١٠ وحدات ، وأن نقطة إعادة الطلب = ٥ وحدات ، وتكلفة الطلبية الواحدة = ٥٠٠ جنيه وتكلفة تخزين الوحدة = ٤٥ جنيه ، وتكلفة نفاذ المخزون (الربح الضائع نتيجة عدم وجود مخزون) = ٢٥ جنيه ، المطلوب إيجاد :

١- متوسط المخزون آخر كل يوم ٢- متوسط عدد وحدات المبيعات الضائعة

٣- متوسط عدد الطلبيات لليوم الواحد؟. ٤- متوسط تكلفة التخزين يومياً

٥- متوسط تكلفة نفاذ المخزون ؟. ٦- تكلفة الطلبية لليوم الواحد؟.

٧- التكلفة الإجمالية ؟.

علماً بأنه من واقع الخبرة الماضية تم التوصل للنتائج التالية عن ٥٠ طلبية :

وقت الطلبية	١	٢	٣	٤
عدد الأيام	٢٠	١٠	١٥	٥

يمكنك استخدام الأرقام العشوائية التالية :

٧٨ ، ٢٨ ، ٨ ، ٢ ، ٢٣ ، ٥٤ ، ٥٧ ، ٠٠ ، ٨٤ ، ٩٥

الفصل الثاني

الإحلال والتجديد

Replacement

الأصول الثابتة هي أصول تقتنيها المنشأة بقصد المساعدة في العملية الإنتاجية وليس بقصد الإتجار فيها وبيعها ، مثل المباني والعدد والآلات والسيارات والأثاث وغيرها . ونظراً لأن هذه الصول تفقد قيمتها أو كثيراً من قيمتها كلما طالت مدة استخدامها أو تشغيلها بالرغم مما يُتبع من وسائل فنية لصيانتها والمحافظة عليها ، فإنه بطبيعة الحال يتبع ذلك تناقص في قيمة رأس المال المستثمر في هذه الأصول.

ولقد عالجت النظرية الإقتصادية تحديد العمر الإقتصادي للآلات والمعدات من أجل تقييم هذا الإستثماراو المفاضلة بين أنواع مختلفة من الآلات والمعدات ، وأيضاً لإتخاذ القرار المتعلق بالإحلال أو الإستبدال من حيث حجم المنافع التي يمكن الحصول عليها ، وكلما زاد حجم المنافع التي تعود من وراء هذه المعدات كلما زاد العائد المتوقع نتيجة الإستثمار فيها واقتناؤها ، وكلما كان هناك مبرراً للموافقة على هذا الإستثمار.

ويتوقف حجم هذه المنافع على عاملين رئيسيين ، أولهما معدلات الإنتاج لهذه المعدات ، وثانيهما ، فترة استخدام هذه المعدات ، فكلما زادت معدلات الإنتاج كلما زاد حجم المنافع من ورائها ، وفي نفس الوقت إذا طالت المدة التي يمكن فيها استخدام هذه المعدات زاد حجم المنافع من وراء الحصول على هذه المعدات.

وبالنظر إلى مبررات الإحلال نجد أنها إما تلف الآلة ، وهنا فإن الحاجة تستدعى إحلال آلة جديدة بدلاً من الآلة الحالية التى لا تعمل كما يجب.

حيث تؤدى إلى تبديد وضياع التشغيل وتقليل الإنتاج وانخفاض جودة المنتج وارتفاع تكلفة العمالة والصيانة. وفي ظل هذه الظروف يصبح الإحلال أمراً ضرورياً . وأيضاً مبررات الإحلال قد يتمثل في التقادم ، فبالرغم من أن هلاك الآلة يُعد سبباً رئيسياً للإحلال إلا أن هناك عوامل أخرى تتداخل في الأمر لتجعل منه ليس العامل الوحيد فى ذلك . وبعبارة أخرى ، فإن ظهور آلة جديدة فى السوق أكثر تطوراً وكفاءة من الآلة الحالية ، والإصرار فى تشغيل الآلة الحالية يجعل من الصعب على المشروع مسايرة التطور في الإنتاج ويترتب عليه تأثير سلبي على الأرباح والمركز التنافسي للشركة.

ومما سبق يمكننا صياغة مشكلة قرار الإحلال فى الآتي :

تتعرّض الآلات والمعدات خلال حياتها الإنتاجية إلى التلف بالإضافة إلى ظهور آلة حديثة تؤدى نفس العمل ولكن بكفاءة أكبر ، وإزاء التقدم التكنولوجي السريع أصبحت الآلات والمعدات أكثر تعرضاً للتقادم . وتتركز المشكلة في تقرير متى يكون إحلال الآلة الجديدة اقتصادياً .

تحديد مدى وفورات التكلفة المرتبطة بالإحلال والتجديد :

يقوم هذا المدخل على تحليل كل من التكاليف والفائدة والإستهلاك لكل من الآلة الحالية والمقترحة على النحو التالي :

(١) التكاليف :

إن تكاليف اقتناء الآلة تنقسم إلى تكاليف مكررة (التكاليف المتوقع استمرارها سنة بعد أخرى ، طالما كانت الآلة مستخدمة في الإنتاج . وتتمثل فى تكلفة العمل المباشر ، والخامات ، والضرائب ، والتأمين ، والطاقة ، ..إلخ) وتكاليف غير مكررة (التي يتحملها المشروع مرةً واحدة خلال حياة

الآلة وتتمثل في ثمن شرائها وتكلفة نقلها وإعدادها في موقع الإنتاج ومصروفات تجارب التشغيل) ويُطلق على التكاليف المكررة وغير المكررة بالتكاليف الإستثمارية٠

وعندما ترغب الشركة فى شراء آلة جديدة ، فإن ذلك يتم على أساس أفضل التقديرات التي تشير إلى أن رأس المال المستثمر سوف يتم استرداده مع العائد المناسب فى المستقبل ، ويدعم هذا العائد بالفرق بين تكاليف التشغيل المكررة من الآلة الحالية والآلة الجديدة المقترحة والذي يُعرف بوفر التكلفة السنوي ٠ ويتم تقدير وفر التكلفة السنوي بتحديد تكلفة التشغيل المُقدّرة للآلة الحالية وتكلفة التشغيل المُقدّرة للآلة الجديدة المقترحة

(٢) الفائدة على رأس المال المُستثمر :

يجب أن يُضاف إلى تكاليف التشغيل فائدة رأس المال سواء أكان رأس المال مملوكاً أو مُقترضاً ٠

(٣) الإهلاك :

والإهلاك هو النقص التدريجى في قيمة الأصل نتيجة للإستخدام أو لمضي المدة ، ويُحسب قسط الإهلاك السنوي ويُضاف إلى تكاليف التشغيل٠

وفيما يلي تطبيق لتقدير وفر التكاليف السنوي :

مثال (١)

ترغب إحدى الشركات الصناعية في شراء آلة لقطع المعادن بلغت تكاليفها الإستثمارية ١٠٠٠٠٠ جنيه ، وتمتلك الشركة آلة قديمة ، وأن العناصر المتباينة من تكاليف التشغيل السنوية لها وللآلة القديمة (الحالية) على النحو التالي :

	الآلة الحالية	الآلة المُقترحة
عمالة مباشرة	٣٠٠٠٠	١٦٠٠٠
عمالة غير مباشرة	١٦٠٠٠	٩٠٠٠
صيانة	٨٠٠٠	٢٠٠٠
قوى محركة	٢٠٠٠	٤٠٠٠
ضرائب وتأمين	٢٠٠٠	٦٠٠٠

فإذا فُرض الآتي :

(١) تبلغ القيمة البيعية للآلة الحالية ٤٠٠٠٠ جنيه.

(٢) معدل تكلفة الأموال ١٠ ٪

(٣) العمر الإنتاجي للآلة القديمة (الحالية) ٤ سنوات وأن قيمتها كخردة بعد ذلك ١٠٠٠٠ جنيه.

(٤) العمر الإنتاجي للآلة الجديدة (المقترحة) ٨ سنوات وأن قيمتها كخردة بعد ذلك ٢٠٠٠٠ جنيه.

والمطلوب إيجاد وفر التكاليف السنوي إذا تم شراء الآلة الجديدة المقترحة ؟.

الحــل :

العائد المُفتقد للآلة القديمة = القيمة السوقية × معدل تكلفة الأموال

$$= ٤٠٠٠٠ \times \frac{١٠}{١٠٠} = ٤٠٠٠$$ جنيه

العائد المُفتقد للآلة الجديدة = التكاليف الإستثمارية × معدل تكلفة الأموال

$$= ١٠٠٠٠٠ \times \frac{١٠}{١٠٠} = ١٠٠٠٠$$ جنيه

♦ قسط الإهلاك السنوي للآلة القديمة (بطريقة القسط الثابت)

$$= \frac{\text{القيمة السوقية - الخردة}}{\text{العمر الإنتاجي}}$$

$$= \frac{٤٠٠٠٠-١٠٠٠٠}{٤} = \frac{٣٠٠٠٠}{٤} = ٧٥٠٠ \text{ جنيه}$$

♦ قسط الإهلاك السنوي للآلة الجديدة المقترحة =

$$= \frac{\text{التكاليف الاستثماري - الخردة}}{\text{العمر الإنتاجي}}$$

$$= \frac{١٠٠٠٠٠-٢٠٠٠٠}{٨} = \frac{٨٠٠٠٠}{٨} = ١٠٠٠٠ \text{ جنيه}$$

	الآلة الحالية	الآلة المُقترحة
عمالة مباشرة	٣٠٠٠٠	١٦٠٠٠
عمالة غير مباشرة	١٦٠٠٠	٩٠٠٠
صيانة	٨٠٠٠	٢٠٠٠
قوى محركة	٢٠٠٠	٤٠٠٠
ضرائب وتأمين	٢٠٠٠	٦٠٠٠
العائد المفتقد	٤٠٠٠	١٠٠٠٠
الإهلاك السنوي	٧٥٠٠	١٠٠٠٠
المجموع	٦٩٥٠٠	٥٧٠٠٠

وفر التكاليف السنوي = ٦٩٥٠٠ – ٥٧٠٠٠ = ١٢٥٠٠ جنيه

وعلى ذلك نجد أن وفر التكاليف السنوي = ١٢٥٠٠ جنيه إذا تم شراء الآلة الجديدة المُقترحة.

وفيما يلي تطبيق على الإحلال في ظل تكاليف التشغيل :

مثال (٢)

آلة تقطيع سعرها ٤٠٠٠ جنيه ، وكانت تكاليف التشغيل والصيانة السنوية وسعرها في نهاية كل سنة كما يلي :

السنة	١	٢	٣	٤	٥	٦
تكلفة التشغيل والصيانة السنوية	٦٠٠	٨٠٠	١٠٠٠	١٤٠٠	١٨٠٠	٢٢٠٠
سعر الآلة في نهاية كل سنة	٢٤٠٠	١٥٠٠	١٠٠٠	٨٠٠	٤٠٠	٤٠٠

والمطلوب حساب فترة الإحلال المثلى لهذه الآلة ؟.

الحـــل :

أولاً : إيجاد النقص في سعر الآلة :

السنة	النقص في سعر الآلة
١	٤٠٠٠ - ٢٤٠٠=١٦٠٠
٢	٤٠٠٠ - ١٥٠٠=٢٥٠٠
٣	٤٠٠٠ - ١٠٠٠=٣٠٠٠
٤	٤٠٠٠ - ٨٠٠ = ٣٢٠٠
٥	٤٠٠٠ - ٤٠٠= ٣٦٠٠
٦	٤٠٠٠ - ٤٠٠ = ٣٦٠٠

ثانياً : إعداد الجدول التالي :

السنة	النقص في سعر الآلة	تكلفة التشغيل والصيانة	تكلفة التشغيل والصيانة (تراكمي)
١	١٦٠٠	٦٠٠	٦٠٠
٢	٢٥٠٠	٨٠٠	١٤٠٠
٣	٣٠٠٠	١٠٠٠	٢٤٠٠
٤	٣٢٠٠	١٤٠٠	٣٨٠٠
٥	٣٦٠٠	١٨٠٠	٥٦٠٠
٦	٣٦٠٠	٢٢٠٠	٧٨٠٠

ثالثاً : إعداد جدول متوسط التكاليف الكلية :

السنة	النقص في سعرالآلة	تكلفة التشغيل والصيانة (تراكمي)	التكلفة الكلية (تراكمي)	متوسط التكاليف الكلية
١	١٦٠٠	٦٠٠	٢٢٠٠	٢٢٠٠=١÷٢٢٠٠
٢	٢٥٠٠	١٤٠٠	٣٩٠٠	١٩٥٠=٢÷٣٩٠٠
٣	٣٠٠٠	٢٤٠٠	٥٤٠٠	١٨٠٠=٣÷٥٤٠٠
٤	٣٢٠٠	٣٨٠٠	٧٠٠٠	١٧٥٠=٤÷٧٠٠٠
٥	٣٦٠٠	٥٦٠٠	٩٢٠٠	١٨٥٠=٥÷٩٢٠٠
٦	٣٦٠٠	٧٨٠٠	١١٤٠٠	١٩٠٠=٦÷١١٤٠٠

ومن الجدول السابق نجد أن متوسط التكاليف الكلية يبدأ في التناقص من نهاية السنة الأولى حتى يصل إلى أقل قيمة في نهاية السنة الرابعة ثم يبدأ في الإرتفاع مرةً أخرى.

وعلى ذلك ، فإن الإحلال الأمثل يتم عند نهاية السنة الرابعة.

وفيما يلي تطبيق على الإحلال في ظل القدرة الإنتاجية للآلة :

مثال (٣)

آلة تقطيع سعرها ٤٠٠٠ جنيه ، وكانت تكاليف التشغيل والصيانة السنوية وسعرها في نهاية كل سنة ، وتنتج بمعدل ١٠٠ وحدة في الساعة فى حالتها الجيدة ، وخطة الإنتاج هي ١٠٠٠ وحدة فى اليوم ، ولذلك يجب تشغيل الآلة لمدة عشر ساعات يومياً لتحقيق رقم الإنتاج المُستهدف ، أما في السنة الثانية فتنخفض قدرتها الإنتاجية إلى ٩٠ وحدة ، وفى السنة الثالثة إلى ٨٠ وحدة ، ... وهكذا ، وبالتالي لابد أن يزداد عدد ساعات العمل فى اليوم لتحقيق رقم الإنتاج المُستهدف ، والجدول التالي يوضح البيانات السابقة فى المثال الأول بالإضافة إلى القدرة الإنتاجية للآلة وفرق التكلفة بسبب القدرة الإنتاجية :

السنة	١	٢	٣	٤	٥	٦
تكلفة التشغيل والصيانة السنوية	٦٠٠	٨٠٠	١٠٠٠	١٤٠٠	١٨٠٠	٢٢٠٠
سعر الآلة في نهاية كل سنة	٢٤٠٠	١٥٠٠	١٠٠٠	٨٠٠	٤٠٠	٤٠٠
القدرة الإنتاجية للآلة	١٠٠	٩٠	٨٠	٧٠	٦٠	٥٠
فرق التكلفة بسبب القدرة الإنتاجية	صفر	٥٠	١٠٠	٢٠٠	٣٠٠	٥٠٠

والمطلوب تحديد العمر الأمثل للإحلال ؟.

الحـــل :

نكون الجدول التالي :

السنة (أ)	النقص في سعرالآلة (ب)	تكلفة التشغيل والصيانة (تراكمي) (جـ)	فرق التكلفة بسبب القدرة الإنتاجية (د)	التكلفة الكلية (هـ) (ب+جـ+د)	متوسط التكاليف الكلية (و) (هـ) ÷ (أ)
١	١٦٠٠	٦٠٠	صفر	٢٢٠٠	٢٢٠٠
٢	٢٥٠٠	١٤٠٠	٥٠	٣٩٥٠	١٩٧٥
٣	٣٠٠٠	٢٤٠٠	١٠٠	٥٥٠٠	١٨٣٣,٣
٤	٣٢٠٠	٣٨٠٠	٢٠٠	٧٢٠٠	١٨٠٠
٥	٣٦٠٠	٥٦٠٠	٣٠٠	٩٥٠٠	١٩٠٠
٦	٣٦٠٠	٧٨٠٠	٥٠٠	١١٩٠٠	١٩٨٣,٣

ومن الجدول السابق نجد أن متوسط التكاليف الكلية يبدأ في التناقص من نهاية السنة الأولى حتى يصل إلى أقل قيمة في نهاية السنة الرابعة ثم يبدأ في الإرتفاع مرةً أخرى.

وعلى ذلك ، فإن الإحلال الأمثل يتم عند نهاية السنة الرابعة.

الإحلال في ظل التقادم :

تكلفة التقادم هي الخسارة التى تنشأ بسبب تقادم المنتجات أو الخدمات المنتجة بواسطة الآلة . فعند تحليل التكاليف أو المقارنة بين الآلة الجديدة والآلة الحالية يؤخذ في الإعتبار ليس الوفورات التي يمكن تخفيضها من الآلة الجديدة ، وإنما تجرى المقارنة بين التكاليف الإستثمارية للآلة الجديدة والتكلفة الإستثمارية للآلة الحالية مع الأخذ في الإعتبار تكلفة التقادم.

مثال (٤)

آلة تقطيع سعرها ٤٠٠٠ جنيه ، والجدول التالي يبين تكاليف التشغيل والصيانة السنوية وفرق التكلفة بسبب القدرة الإنتاجية ، وكذلك تكلفة التقادم لتلك الآلة في فترة حياتها للسنوات الست القادمة :

السنة	١	٢	٣	٤	٥	٦
تكلفة التشغيل والصيانة السنوية	٦٠٠	٨٠٠	١٠٠٠	١٤٠٠	١٨٠٠	٢٢٠٠
سعر الآلة في نهاية كل سنة	٢٤٠٠	١٥٠٠	١٠٠٠	٨٠٠	٤٠٠	٤٠٠
فرق التكلفة بسبب القدرة الإنتاجية (تراكمي)	صفر	٥٠	١٠٠	٢٠٠	٣٠٠	٥٠٠
فرق التكلفة بسبب التقادم (تراكمي)	١٠٠	٢٠٠	٣٠٠	٤٠٠	٦٠٠	٨٠٠

والمطلوب تحديد السنة المثلى لإحلال الآلة ؟.

الحـــل :

نكون الجدول التالي :

السنة (أ)	النقص في سعر الآلة (ب)	تكلفة التشغيل (تراكمي) (جـ)	فرق التكلفة بسبب القدرة الإنتاجية (د)	فرق التكلفة بسبب التقادم (هـ)	التكلفة الكلية (و) (ب+جـ+د+هـ)	متوسط التكاليف الكلية (ز) (و) ÷ (أ)
١	١٦٠٠	٦٠٠	صفر	١٠٠	٢٣٠٠	٢٣٠٠
٢	٢٥٠٠	١٤٠٠	٥٠	٢٠٠	٤١٥٠	٢٠٧٥
٣	٣٠٠٠	٢٤٠٠	١٠٠	٣٠٠	٥٨٠٠	١٩٣٣,٣
٤	٣٢٠٠	٣٨٠٠	٢٠٠	٤٠٠	٧٦٠٠	١٩٠٠
٥	٣٦٠٠	٥٦٠٠	٣٠٠	٦٠٠	١٠١٠٠	٢٠٢٠
٦	٣٦٠٠	٧٨٠٠	٥٠٠	٨٠٠	١٢٧٠٠	٢١١٦,٧

ومن الجدول السابق نجد أن متوسط التكاليف الكلية يبدأ في التناقص من نهاية السنة الأولى حتى يصل إلى أقل قيمة في نهاية السنة الرابعة ثم يبدأ في الإرتفاع مرةً أخرى في نهاية السنة الخامسة. وعلى ذلك ، فإن الإحلال الأمثل يتم عند نهاية السنة الرابعة.

الإحلال في ظل عدم وجود قيمة للآلة في نهاية كل سنة :

مثال (٥)

قامت شركة الوادى الجديد لتصنيع البلح الجاف بشراء آلة كبس بتكلفة قدرها ١٤٠٠٠ جنيه ، وعمرها الإنتاجي ٨ سنوات ، والآلة ليس لها قيمة في نهاية كل سنة من السنوات الثمانية علماً بأن تكاليف التشغيل : ٨٠٠ ، ١٨٠٠ ، ٢٨٠٠ ، ٣٨٠٠ ، ٤٨٠٠ ، ٥٨٠٠ ، ٦٨٠٠ ، ٧٨٠٠ جنيه على التوالى ، والمطلوب تحديد الوقت اللازم لإستبدال هذه الآلة ؟.

الحـــل :

نكون الجدول التالي :

السنة	النقص في سعر الآلة	تكلفة التشغيل	تكلفة التشغيل (تراكمي)	التكلفة الكلية	متوسط التكاليف الكلية
١	١٤٠٠٠	٨٠٠	٨٠٠	١٥٦٠٠	١٥٦٠٠
٢	١٤٠٠٠	١٨٠٠	٢٦٠٠	١٨٤٠٠	٩٢٠٠
٣	١٤٠٠٠	٢٨٠٠	٥٤٠٠	٢٢٢٠٠	٧٤٠٠
٤	١٤٠٠٠	٣٨٠٠	٩٢٠٠	٢٧٠٠٠	٦٧٥٠
٥	١٤٠٠٠	٤٨٠٠	١٤٠٠٠	٣٢٨٠٠	٦٥٦٠
٦	١٤٠٠٠	٥٨٠٠	١٩٨٠٠	٣٩٦٠٠	٦٦٠٠
٧	١٤٠٠٠	٦٨٠٠	٢٦٦٠٠	٤٧٤٠٠	٦٧٧١,٤
٨	١٤٠٠٠	٧٨٠٠	٣٤٤٠٠	٥٦٢٠٠	٧٠٢٥

ومن الجدول السابق نجد أن أقل متوسط تكلفة كلية هي عند نهاية السنة الخامسة ،وعلى ذلك ، فإن الإحلال الأمثل يتم عند نهاية السنة الخامسة .

الإحلال في حالتي الإقتراض وعدم الإقتراض :

مثال (٦)

قامت إحدى الشركات الصناعية بشراء آلة بسعر ١٠٠٠٠ جنيه ، والجدول التالي يبين تكاليف التشغيل والصيانة السنوية وسعرها في نهاية كل سنة :

السنة	١	٢	٣	٤	٥
سعر الآلة في نهاية كل سنة	٥٢٠٠	٣٦٠٠	٢٤٠٠	١٦٠٠	٨٠٠
تكلفة التشغيل والصيانة	٢٥٠٠	٢٨٠٠	٣٢٠٠	٤٦٠٠	٥٠٠٠

والمطلوب تحديد فترة الإستبدال لهذه الآلة في الحالتين التاليتين :

(١) إذا كان رأس المال المستثمر في هذه الآلة غير مُقترض ؟.

(٢) إذا كان رأس المال المستثمر في هذه الآلة مُقترض بمعدل فائدة ١٠% ؟.

الحـــل :

أولاً : إذا كان رأس المال المستثمر غير مُقترض :

نكون الجدول التالي :

السنة (أ)	النقص في السعر السنوي (ب)	تكلفة التشغيل (تراكمي) (جـ)	التكلفة الكلية (د) (ب+جـ)	متوسط التكاليف الكلية (هـ) (د) ÷ (أ)
١	٤٨٠٠	٢٥٠٠	٧٣٠٠	٧٣٠٠
٢	٦٤٠٠	٥٣٠٠	١١٧٠٠	٥٨٥٠
٣	٧٦٠٠	٨٥٠٠	١٦١٠٠	٥٣٦٦,٧
٤	٨٤٠٠	١٣١٠٠	٢١٥٠٠	٥٣٧٥
٥	٩٢٠٠	١٨١٠٠	٢٧٣٠٠	٥٤٦٠

النقص فى السعر السنوي :

السنة	النقص في السعر السنوى
١	١٠٠٠٠ – ٥٢٠٠ = ٤٨٠٠
٢	١٠٠٠٠ – ٣٦٠٠ = ٦٤٠٠
٣	١٠٠٠٠ – ٢٤٠٠ = ٧٦٠٠
٤	١٠٠٠٠ – ١٦٠٠ = ٨٤٠٠
٥	١٠٠٠٠ – ٨٠٠ = ٩٢٠٠

أي أن فترة الإستبدال هي نهاية السنة الثالثة في حالة عدم الإقتراض.

ثانياً : إذا كان رأس المال المستثمر مُقترض :

يتم تكوين نفس الجدول السابق مع إضافة الفائدة بمعدل ١٠ % ؛ علماً بأن الفائدة تُحسب على سعر الآلة فى بداية السنة على النحو التالي :

- فائدة السنة الأولى = ١٠٠٠٠ × ٠,١٠ = ١٠٠٠ جنيه
- فائدة السنة الثانية = ٥٢٠٠ × ٠,١٠ = ٥٢٠ جنيه
- فائدة السنة الثالثة = ٣٦٠٠ × ٠,١٠ = ٣٦٠ جنيه
- فائدة السنة الرابعة = ٢٤٠٠ × ٠,١٠ = ٢٤٠ جنيه
- فائدة السنة الخامسة = ١٦٠٠ × ٠,١٠ = ١٦٠ جنيه

ثم نحسب الفائدة التراكمية على النحو التالي :

- السنة الأولى = ١٠٠٠ جنيه
- السنة الثانية = ١٥٢٠ جنيه
- السنة الثالثة = ١٨٨٠ جنيه
- السنة الرابعة = ٢١٢٠ جنيه
- السنة الخامسة = ٢٢٨٠ جنيه

ثم يُضاف على التكلفة الكلية في الحالة الأولى الفائدة التراكمية على النحو التالي :

السنة	التكلفة الكلية قبل إضافة الفوائد	الفوائد التراكمية	التكلفة الكلية بعد إضافة الفوائد	متوسط التكاليف الكلية
١	٧٣٠٠	١٠٠٠	٨٣٠٠	٨٣٠٠
٢	١١٧٠٠	١٥٢٠	١٣٢٢٠	٦٦١٠
٣	١٦١٠٠	١٨٨٠	١٧٩٨٠	٥٩٩٣,٣
٤	٢١٥٠٠	٢١٢٠	٢٣٦٢٠	٥٩٠٥
٥	٢٧٣٠٠	٢٢٨٠	٢٩٥٨٠	٥٠١٦

ويتضح من الجدول السابق أن فترة الإستبدال المثلى هي نهاية السنة الرابعة في حالة إقتراض المبلغ ودفع ما عنيه من فوائد ٠

تقدير قيمة الآلة القديمة (الحالية) رياضياً باستخدام طريقة مخصص الإهلاك المستثمر :

مخصص الاستهلاك المستثمر :

يتم حجز مبلغ ثابت من الأرباح فى نهاية كل سنة من سنوات العمر الإنتاجي للأصل الثابت ، وبالتالى استثمار هذه المبالغ في أحد البنوك التجارية طبقاً لمعدل الإستثمار السائد في السوق ، بحيث تكون جملة هذه المبالغ المتساوية تعادل القيمة الهالكة من الأصل فى نهاية عمره الإنتاجي ٠ ويتم حساب مخصص الإهلاك المستثمر على النحو التالي :

مخصص الإهلاك المستثمر = م

$$= (\text{قيمة الأصل} - \text{الخردة}) \left(\frac{ع}{(1+ع)^{ن} - 1} \right)$$

حيث ع = معدل الفائدة ، ن = العمر الإنتاجي للأصل

مثال (٧)

آلة قيمتها الأصليه ٢٢٥٠٠ جنيه ، وعمرها الإنتاجي ٤ سنوات بعدها يمكن بيعها كخرده بمبلغ ٢٥٠٠ جنيه ، وبفرض أنه تم استخدام طريقة مخصص الإهلاك المستثمر فى إستهلاك هذا الأصل وأنه أمكن استثمار مخصص الإهلاك بمعدل فائده مركبة ٨ ٪ سنوياً ، المطلوب حساب قسط الإستهلاك السنوي الثابت ؟.

الحـــل :

قسط الإهلاك السنوي الثابت (مخصص الإهلاك السنوي)

$$= \text{م} = (\text{قيمة الأصل} - \text{الخردة}) \left(\frac{\text{ع}}{(1+\text{ع})^{\text{ن}} - 1} \right)$$

$$\therefore \text{م} = (22500 - 2500) \left(\frac{0.08}{(1+0.08)^{4} - 1} \right)$$

$$\therefore \text{م} = 20000 \times \frac{0.08}{1.360489 - 1}$$

$$= 20000 \times \frac{0.08}{0.360489}$$

$= 20000 \times 2219207 = 4438.42$ جنيه.

مثال (٨)

مصنع يمتلك آلة تنتج ٥٠٠٠ وحدة سنوياً ويُقدر عمرها الإنتاجي بعشر سنوات وتبلغ مصروفات تشغيلها ٢٠٠٠ جنيه سنوياً ومصاريف صيانتها وإصلاحها ٣٠٠٠ جنيه سنوياً . ويُراد استبدالها بآلة جديدة عمرها الإنتاجي ١٠ سنوات وقيمتها ١٠٠٠٠٠ جنيه وقدرتها الإنتاجية ١٠٠٠٠

وحدة سنوياً ومصروفات صيانتها وإصلاحها ٥٠٠٠ جنيه سنوياً ، فإذا كان معدل الفائدة المركبة ٨ ٪ سنوياً ، المطلوب إيجاد :

(١) تكلفة الوحدة المنتجة ؟.

(٢) تقدير قيمة الآلة القديمة (الحالية) ؟

الحـــل :

١- فائدة رأس المال $= ١٠٠٠٠٠ \times \frac{٨}{١٠٠} = ٨٠٠٠$ جنيه

٢- قيمة الإهلاك السنوي للآلة الجديدة

$$\therefore م = ١٠٠٠٠٠ \left(\frac{٠,٠٨}{(١+٠,٠٨)^{١٠} - ١} \right)$$

$$\therefore م = ١٠٠٠٠٠ \times \frac{٠,٠٨}{٢,١٥٨٩٢٥ - ١}$$

$$= ١٠٠٠٠٠ \times \frac{٠,٠٨}{١,١٥٨٩٢٥}$$

$$= ١٠٠٠٠٠ \times ٠,٠٦٩٠٢٩ = ٦٩٠٢,٩٤٩$$ جنيه.

٣- مصروفات الصيانة والإصلاح = ٥٠٠٠ جنيه

إجمالي تكاليف الإنتاج السنوية = ٨٠٠٠ + ٦٩٠٢,٩٤٩ + ٥٠٠٠

= ١٩٩٠٢,٩٤٩ جنيه

$$\text{تكلفة الوحدة المنتجة} = \frac{\text{إجمالي تكاليف الإنتاج السنوية}}{\text{عدد الوحدات المنتجة}}$$

$$= \frac{١٩٩٠٢,٩٤٩}{١٠٠٠٠} = ١,٩٩$$ جنيه

ويمكن تقدير الآلة القديمة على أساس ان تكلفة الوحدة المنتجة = ١,٩٩ جنيه

وبفرض أن قيمة الآلة القديمة س :

١- فائدة رأس المال = س × $\frac{٨}{١٠٠}$ = ٠,٠٨ س

٢- قسط الإهلاك (قيمة الإهلاك السنوي)

$$= س \left(\frac{٠,٠٨}{(١+٠,٠٨)^{١٠} - ١} \right)$$

$$\therefore م = س × \frac{٠,٠٨}{٢,١٥٨٩٢٥ - ١}$$

$$= س × \frac{٠,٠٨}{١,١٥٨٩٢٥}$$

= س × ٠,٠٦٩٠٢٩ =٠,٠٦٩٠٢٩ س

٣- مصروفات الصيانة والإصلاح = ٣٠٠٠ جنيه

٤- مصروفات التشغيل = ٢٠٠٠ جنيه

إجمالي تكاليف الإنتاج السنوية للآلة القديمة =

=٠,٠٨ س + ٠,٠٦٩٠٢٩ س + ٣٠٠٠ + ٢٠٠٠

=٥٠٠٠ + ٠,١٤٩٠٢٩٤ س

$$\therefore \frac{٥٠٠٠ + ٠,١٤٩٠٢٩٤ س}{٥٠٠٠} = ١,٩٩$$

∴ ٩٩٥٠ = ٥٠٠٠ + ٠,١٤٩٠٢٩٤ س

∴ ٩٩٥٠ - ٥٠٠٠ = ٠,١٤٩٠٢٩٤ س

∴ ٤٩٥٠ = ٠,١٤٩٠٢٩٤ س

∴ س = قيمة الآلة الجديدة = ٣٣٢١٥ جنيه

تمارين على الإحلال والتجديد

(١) ترغب شركة المنصورة للبلاستيك في شراء آلة للتغليف بلغت تكاليفها الإستثمارية ٥٠٠٠٠ جنيه ، وتمتلك الشركة آلة قديمة وتبلغ تكاليف التشغيل السنوية للآلة القديمة وأيضاً للآلة الجديدة المُزمع شراؤها على النحو التالي :

	الآلة القديمة	الآلة الجديدة
عمالة مباشرة وغير مباشرة	٢٣٠٠٠	١٣٠٠٠
صيانة	٤٠٠٠	١٠٠٠
قوى محركة	١٠٠٠	٢٠٠٠
ضرائب وتأمين	١٠٠٠	٣٠٠٠

فإذا علمت أن :

(١) تبلغ القيمة السوقية للآلة القديمة ٢٠٠٠٠ جنيه.

(٢) معدل تكلفة الأموال ١٥ ٪

(٣) العمر الإنتاجي للآلة القديمة ٥ سنوات وأن قيمتها كخردة في نهاية العمر الإنتاجي ٥٠٠٠ جنيه.

(٤) العمر الإنتاجي للآلة الجديدة ١٠ سنوات وأن قيمتها كخردة بعد ذلك ١٠٠٠٠ جنيه.

والمطلوب إيجاد وفر التكاليف السنوي إذا تم شراء الآلة الجديدة المقترحة ؟.

(٢) حدد فترة الإستبدال لشركة ترغب باستبدال المعمل التابع لها والذي بلغ تكلفة شرائه ١٥٢٠٠ جنيه ، وقيمتها كخردة ٢٠٠ جنيه ، وكانت تكاليف الصيانة وسعر الآلة في نهاية كل سنة على النحو التالي :

السنة	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨
سعر الآلة في نهاية كل سنة	٢٠٠	٥٠٠	٨٠٠	١٢٠٠	١٨٠٠	٢٥٠٠	٣٢٠٠	٤٠٠٠
تكلفة الصيانة	٩٠٠٠	٧٠٠٠	٥٠٠٠	٤٠٠٠	٣٠٠٠	١٠٠٠	٨٠٠	٢٠٠

(٣) آلة كبس سعرها ٢٠٠٠ جنيه ، والجدول التالي يوضح البيانات الآتية :

السنة	١	٢	٣	٤	٥	٦
تكلفة التشغيل والصيانة السنوية	٣٠٠	٤٠٠	٥٠٠	٧٠٠	٩٠٠	١١٠٠
سعر الآلة في نهاية كل سنة	١٢٠٠	٧٥٠	٥٠٠	٤٠٠	٢٠٠	٢٠٠
القدرة الإنتاجية للآلة	٥٠	٤٥	٤٠	٣٥	٣٠	٢٥
فرق التكلفة بسبب القدرة الإنتاجية	صفر	٢٥	٥٠	١٠٠	١٥٠	٢٥٠

والمطلوب تحديد العمر الأمثل للإحلال ؟.

(٤) آلة لتقطيع المعادن سعرها ٨٠٠٠ جنيه ، والجدول التالي يبين البيانات الضرورية :

السنة	١	٢	٣	٤	٥	٦
تكلفة التشغيل والصيانة السنوية	١٢٠٠	١٦٠٠	٢٠٠٠	٢٨٠٠	٣٦٠٠	٤٤٠٠
سعر الآلة في نهاية كل سنة	٤٨٠٠	٣٠٠٠	٢٠٠٠	١٦٠٠	٨٠٠	٨٠٠
فرق التكلفة بسبب القدرة الإنتاجية (تراكمي)	صفر	١٠٠	٢٠٠	٤٠٠	٦٠٠	١٠٠٠
فرق التكلفة بسبب التقادم (تراكمي)	٢٠٠	٤٠٠	٦٠٠	٨٠٠	١٢٠٠	١٦٠٠

والمطلوب إيجاد فترة الإحلال المثلى لهذه الآلة ؟.

(٥) آلة تبلغ تكلفتها ٩٠٠٠ جنيه وتكلفة التشغيل والصيانة السنوية ٢٠٠ جنيه للسنة الأولى وتزداد بـ ٢٠٠ جنيه سنوياً ، والمطلوب تحديد فترة الإستبدال المثلى لهذه الآلة إذا علمت أن ليس لها سعر إعادة بيع ، وعلى فرض أن عمر الآلة ثمان سنوات وأنه يمكن شراء الآلة بالإقتراض بسعر فائدة ١٠% سنوياً ؟.

(٦) قامت إحدى الشركات الصناعية بشراء آلة بسعر ٥٠٠٠ جنيه ، والجدول التالي يبين تكاليف التشغيل والصيانة السنوية وسعرها في نهاية كل سنة :

السنة	١	٢	٣	٤	٥
سعر الآلة في نهاية كل سنة	٣٦٠٠	١٨٠٠	١٢٠٠	٨٠٠	٤٠٠
تكلفة التشغيل والصيانة	١٢٥٠	١٤٠٠	١٦٠٠	٢٣٠٠	٢٥٠٠

والمطلوب تحديد فترة الإحلال المثلى لهذه الآلة في الحالتين التاليتين :

١ - إذا كان رأس المال المستثمر في هذه الآلة غير مُقترض ؟.

٢ - إذا كان رأس المال المستثمر في هذه الآلة مُقترض بمعدل فائدة ٨ %

(٧) يرغب أحد المصانع في شراء آلة تكلفتها ١٠٠٠٠٠ جنيه وتنتج ١٠٠٠٠ وحدة سنوياً ويُقدر الخبراء عمرها الإنتاجي بعشر سنوات ، وتُقدر مصروفات التشغيل والصيانة والإصلاح بمبلغ ٢٥٠٠٠ جنيه. وبفرض أن المصنع لديه آلة قديمة عمرها الإنتاجي ٥ سنوات وتستطيع أن تنتج ٢٠٠٠ وحدة سنوياً ومصروفات تشغيلها وصيانتها وإصلاحها ٧٠٠٠ جنيه سنوياً ، فإذا كان معدل الفائدة المركبة ٩ ٪ سنوياً ، المطلوب إيجاد قيمة الآلة القديمة ؟

الفصل الثالث

تحليل نقطة التعادل

Break-even Point Analysis

نقطة التعادل هي النقطة التي تعبر عن حجم الإنتاج الذي يتعادل عنده الإيرادات الكلية مع التكاليف الكلية ، أي هي النقطة التي يبلغ الربح عندها الصفر ، أي أنها النقطة التي لا تتحقق عندها أرباح أو خسائر.

والهدف من دراسة هذا الأسلوب هو التعرّف على حجم الإنتاج وما يقابله من ربح أو خسارة ، واتخاذ القرار الرشيد في الوقت السليم ، علماً بأن حجم الإنتاج الذي يسبق هذه النقطة يحقق خسائر ، أما حجم الإنتاج بعد هذه النقطة يحقق أرباح.

وتمكننا دراستنا لهذا الأسلوب من تحقيق أمور هامة منها :

١. التعرُف على القيمة الحدية للربح ، أي مقدار الربح المحقق نتيجة استغلال وحدة إضافية.

٢. التعرُف على النسبة المُستغلة من الطاقة للوصول إلى حجم التعادل.

٣. التعرُف على درجة الأمان ، حيث :

$$\text{درجة الأمان} = \frac{\text{المبيعات} - \text{انتاج التعادل}}{\text{الطاقة الكلية}} \times ١٠٠$$

٤. التعرُف على العلاقة بين أحجام الإنتاج المختلفة وما يقابلها من ربح وخسائر.

٥. التعرُف على كمية الإنتاج التي تقابل ربح معين يجب تحقيقه.

٦. المقارنة بين البدائل المختلفة عن طريق هذا الأسلوب.

تعاريف هامة :

(١) التكاليف :

التكاليف الثابتة : هي التكاليف التي لا تتوقف على كمية الإنتاج ،

التكاليف المتغيرة : هي التكاليف التي تتوقف على كمية الإنتاج ، ونجد أن :

- التكاليف المتغيرة الكلية (م)

= كمية الإنتاج × التكاليف المتغيرة للوحدة الواحدة

$\therefore$ م = ن × $م_و$

- التكاليف الثابتة للوحدة = $\frac{\text{التكاليف الكلية}}{\text{عدد الوحدات}}$

$\therefore$ $ث_و = \frac{ث}{ن}$

- التكاليف الكلية (ك) = ث + ($م_و$ × ن)

فمثلاً :

إذا كانت التكاليف الثابتة الكلية (ث) = ٣٠٠٠٠٠

التكاليف المتغيرة للوحدة ($م_و$) = ٥٠٠

كمية الإنتاج (ن) = ١٠٠ وحدة

$\therefore$ التكاليف الكلية (ك) = ث + ($م_و$ × ن)

= ٣٠٠٠٠٠ + (٥٠٠ × ١٠٠)

= ٣٠٠٠٠٠ + ٥٠٠٠٠ = ٣٥٠٠٠٠ جنيه

(٢) الإيرادات:

- الإيراد الكلي (ر) = كمية الإنتاج (ن) × سعر الوحدة الواحدة (ع)

(٣) الربح :

الربح (ح) = الإيراد الكلي (ر) - التكاليف الكلية (ك)

$$= \text{حجم الإنتاج الذي يحقق ربح معين} \left(\text{سعر البيع} - \text{التكلفة المتغيرة للوحدة} \right) - \text{التكلفة الثابتة}$$

$$= \text{حجم الإنتاج الذي يحقق ربح معين} \times \text{هامش حد المساهمة} - \text{التكلفة الثابتة}$$

$$= \left(\text{سعر البيع} \times \text{حجم الإنتاج الذي يحقق ربح معين} \right) - \left(\text{حجم الإنتاج الذي يحقق ربح معين} \times \text{التكلفة المتغيرة للوحدة} \right) - \text{التكلفة الثابتة}$$

(٤) نقطة التعادل:

- نقطة التعادل : هي النقطة التي تتعادل عندها الإيرادات الكلية مع التكاليف الكلية ، أي هي النقطة التي يكون عندها الربح يعادل الصفر
- والكمية التي تُنتج في مثل هذه الحالة يُطلق عليها كمية التعادل ، حيث :

- كمية التعادل $= \dfrac{\text{التكاليف الثابتة}}{\text{سعر بيع الوحدة} - \text{التكاليف المتغيرة للوحدة}}$

أما قيمة التعادل (نقطة التعادل بالقيمة) يمكن حسابها على بالعلاقة التالية

- قيمة التعادل $= \dfrac{\text{التكاليف الثابتة}}{1 - \dfrac{\text{التكاليف المتغيرة للوحدة}}{\text{سعر بيع الوحدة}}}$

∴ نقطة التعادل بالقيمة $= \dfrac{ث}{1 - \dfrac{م_و}{ع}}$

مثال (١)

بمعلومية الآتي ، المطلوب حساب نقطة التعادل بالكمية والقيمة:

- التكاليف الثابتة الكلية (ث) = ١٥٠٠٠٠
- التكاليف المتغيرة للوحدة ($م_و$) = ٦٠٠ جنيه
- سعر بيع الوحدة = ١١٠٠ جنيه .
- علماً بأن المشروع يمكنه إنتاج ١٠٠٠ وحدة سنوياً ، أي أن الطاقة الكلية (ط) = ١٠٠٠ وحدة

الحل :

(أولاً) تحديد نقطة التعادل بالكمية

$\therefore$ كمية التعادل = $\frac{١٥٠٠٠٠}{١١٠٠-٦٠٠}$ = ٣٠٠ وحدة

وهذا يعني أنه عند إنتاج وبيع ٣٠٠ وحدة يتحقق التعادل بين الإيرادات وتكاليف الإنتاج .

(ثانياً) تحديد نقطة التعادل بالقيمة

لتحديد قيمة التعادل نقوم بالآتي :

قيمة التعادل = كمية التعادل × سعر بيع الوحدة (ع)

= ٣٠٠ × ١١٠٠ = ٣٣٠٠٠٠ جنيه

أو يمكن استخدام العلاقة التالية مباشرةً :

$\therefore$ نقطة التعادل بالقيمة = $\frac{ث}{١ - \frac{م_و}{ع}}$

$\therefore$ نقطة التعادل بالقيمة = $\frac{١٥٠٠٠٠}{١ - \frac{٦٠٠}{١١٠٠}}$ = ٣٣٠٠٠٠ جنيه

وهو ما يعني أنه عند مبيعات قيمتها ٣٣٠٠٠٠ جنيه يتحقق التعادل بين الإيرادات وتكاليف الإنتاج ،وعلى ذلك فإن من مصلحة المشروع زيادة مبيعاته لتحقيق الهدف وهو الربحية التجارية

(٥) نسبة التعادل:

$$\text{نسبة التعادل} = \frac{\text{كمية التعادل}}{\text{الحد الأقصى للإنتاج}}$$

$$\therefore \text{س} = \frac{\text{كمية التعادل}}{\text{ط}}$$

ففى المثال (١) السابق نجد أن :

$$\text{نسبة التعادل} = \frac{٣٠٠}{١٠٠٠} = ٠,٣٠ = ٣٠\%$$

(٦) حد المساهمة أو نسبة المساهمة :

حد المساهمة = سعر البيع للوحدة – التكاليف المتغيرة للوحدة

$$\therefore \text{هـ} = \text{ع} - \text{م}_{\text{و}}$$

ففى المثال (١) السابق نجد أن :

حد المساهمة = هـ = ١١٠٠ – ٦٠٠ = ٥٠٠

(٧) حجم الإنتاج الذي يحقق ربح معين :

حجم الإنتاج الذي يحقق ربح معين =

$$= \frac{\text{التكاليف الثابتة + الربح المنشود}}{\text{سعر بيع الوحدة – التكاليف المتغيرة للوحدة}}$$

$$= \frac{\text{ث} + \text{ح}}{\text{ع} - \text{م}_{\text{و}}}$$

(٨) الزيادة المطلوبة في المبيعات لمقابلة نفقات بيع وتوزيع إضافية

$$\text{الزيادة المطلوبة في المبيعات} = \frac{\text{النفقات الاضافية}}{1 - \frac{م_و}{ع}}$$

فإذا فُرض أن نفقات البيع والتوزيع الإضافية قُدّرت بمبلغ ٣٠٠٠٠ جنيه ؛ فما هي الزيادة المطلوبة في المبيعات لمقابلة تلك النفقات ؟

وبالرجوع لبيانات المثال (١) السابق ، نجد أن :

$$\text{الزيادة المطلوبة في المبيعات} = \frac{\text{النفقات الاضافية}}{1 - \frac{م_و}{ع}}$$

∴ الزيادة المطلوبة في المبيعات $= \frac{30000}{1 - \frac{600}{1100}} = 66000$ جنيه

∴ الزيادة في كمية المبيعات $= \frac{66000}{ع} = \frac{66000}{1100} = 60$ وحدة

(٩) حد المساهمة الكلي :

حد المساهمة الكلي = المبيعات − التكاليف المتغيرة الكلية

∴ هـ الكلية = الربح + التكاليف الثابتة = ح + ث

(١٠) نسبة الطاقة المُستغلة لتحقيق التعادل :

نسبة الطاقة المُستغلة لتحقيق التعادل =

$$= \frac{\text{التكاليف الثابتة}}{\text{الطاقة الكلية (سعر البيع − التكاليف المتغيرة للوحدة)}} \times 100$$

$$= \frac{ث}{ط(ع - م_و)} = \frac{\text{نقطة التعادل}}{\text{الطاقة الكلية}} \times 100$$

(١١) نسبة الطاقة المُستغلة لتحقيق ربح معين :

نسبة الطاقة المُستغلة لتحقيق ربح معين =

$$= \frac{\text{التكاليف الثابتة + الربح}}{\text{الطاقة الكلية (سعر البيع – التكاليف المتغيرة للوحدة)}} \times ١٠٠$$

$$= \frac{\text{مجموع الإنتاج الذي يحقق ربح معين}}{\text{الطاقة الكلية}} \times ١٠٠$$

بعض الإفتراضات للتعامل الجبري لأسلوب التعادل :

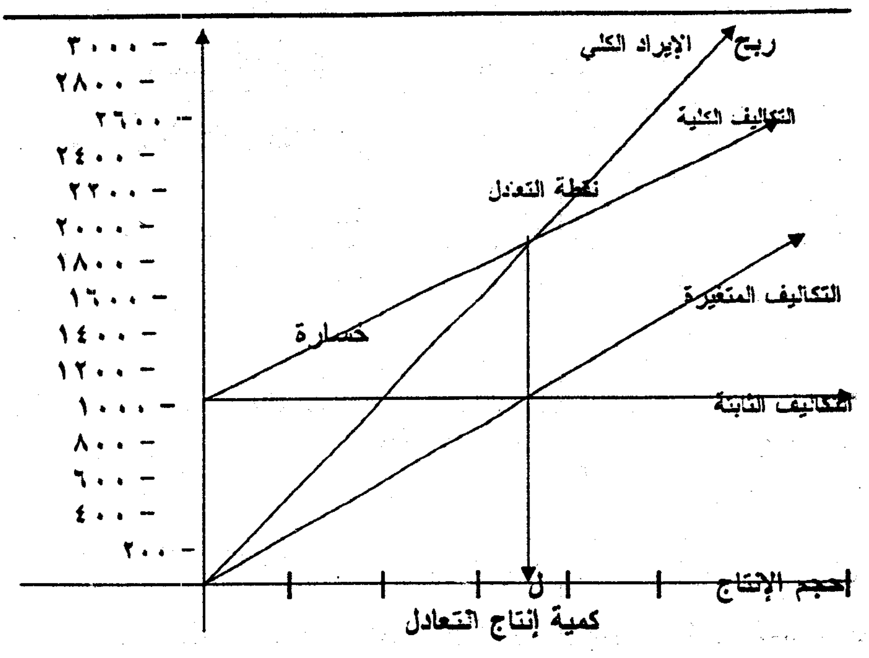
١. الطاقة الكلية (ط) تعبر عن الطاقة الإنتاجية ، فإذا كانت مجهولة يُفترض أنها = حجم الإنتاج الذي يحقق ربح معين

٢. سعر البيع إذا كان مجهولاً يُفترض أنه يساوى جنيه واحد بشرط أن يكون أكبر من تكلفة الوحدة المتغيرة للوحدة ($م_و$)

٣. حجم المبيعات يساوي كمية المبيعات ويُعبر عنها بالوحدات ، أما رقم المبيعات يساوي قيمة المبيعات ويُعبر عنها بالجنيهات.

التعبير البياني لنقطة التعادل :

للتمثيل البياني لنقطة التعادل يتم رصد وحدات الإنتاج على المحور السيني (الأفقي) كما يتم رصد الإيرادات والتكاليف على المحور الصادي (الرأسي)، ومن نقطة تقاطع دوال الإيراد الكلي والتكاليف الكلية يتم تحديد نقطة التعادل بيانياً ، ويأخذ ذلك الشكل التالي :



ومن الرسم السابق :

١. خط التكاليف الثابتة ظهر موازياً للمحور السيني ، حيث أن التكاليف الثابتة لا تتأثر بحجم الإنتاج.

٢. خط الإيراد الكلي بدأ من نقطة الأصل لعدم وجود إيراد إذا كان حجم الإنتاج صفراً وأن سعر البيع ثابت لا يتغير مع تغير حجم الإنتاج

٣. خط التكاليف المتغيرة بدأ من نقطة الأصل لإرتباط هذه التكاليف بوجود إنتاج ، وبالتالي ظهر تحت خط الإيراد لأن نسبة الزيادة في هذه التكاليف أقل من نسبة زيادة الإنتاج.

٤. خط التكاليف الكلية بدأ من نقطة التكاليف الثابتة في حالة عدم وجود إنتاج لأن التكاليف المتغيرة ستكون صفراً ، واتجه هذا الخط موازياً للتكاليف المتغيرة لأن الفرق بينهما ثابت ويمثل التكاليف الثابتة.

٥. تظهر نقطة التعادل (ل) عند تقاطع خط التكاليف الكلية مع خط الإيرادات الكلية.

٦. يلاحظ قبل الوصول للنقطة (ل) يكون خط التكاليف الكلية أعلى من خط الإيراد الكلي مما يحقق خسائر ، أما بعد نقطة التعادل نجد ان خط الإيراد الكلي أعلى من خط الإيراد الكلي أعلى من خط التكاليف الكلية فيتحقق بذلك ربح.

مثال (٢)

إذا كانت :

- التكاليف الثابتة الكلية (ث) = ٣٠٠٠٠٠
- التكاليف المتغيرة للوحدة ($م_و$) = ٥٠٠٠ جنيه
- سعر بيع الوحدة = ٦٠٠٠ جنيه .
- الحد الأقصى لعدد الوحدات المنتجة (ن) = ٥٠٠ وحدة

المطلوب :

(١) تحديد نقطة التعادل جبرياً وبيانياً ؟.

(٢) تحديد نسبة التعادل ؟.

(٣) ماذا يحدث لو إرتفع سعر بيع الوحدة إلى (٧٠٠٠) جنيه ؟.

(٤) ماذا يحدث لو إنخفضت التكاليف المتغيرة للوحدة إلى (٤٠٠٠) جنيه

(٥) ماذا يحدث لو زادت التكاليف الثابتة (٥٠٠٠٠) جنيه ؟.

حل :

) تحديد نقطة التعادل جبرياً وبيانياً

$$\text{مية التعادل} = \frac{\text{التكاليف الثابتة}}{\text{سعر بيع الوحدة – التكاليف المتغيرة للوحدة}}$$

$$= \frac{٣٠٠٠٠٠}{٦٠٠٠-٥٠٠٠} = ٣٠٠ \text{ وحدة}$$

∴ التكاليف الكلية (ك) = ث + ($م_و$ × ن)

= ٣٠٠٠٠٠ + (٣٠٠ × ٥٠٠٠)

= ٣٠٠٠٠٠ + ١٥٠٠٠٠٠ = ١٨٠٠٠٠٠ جنيه

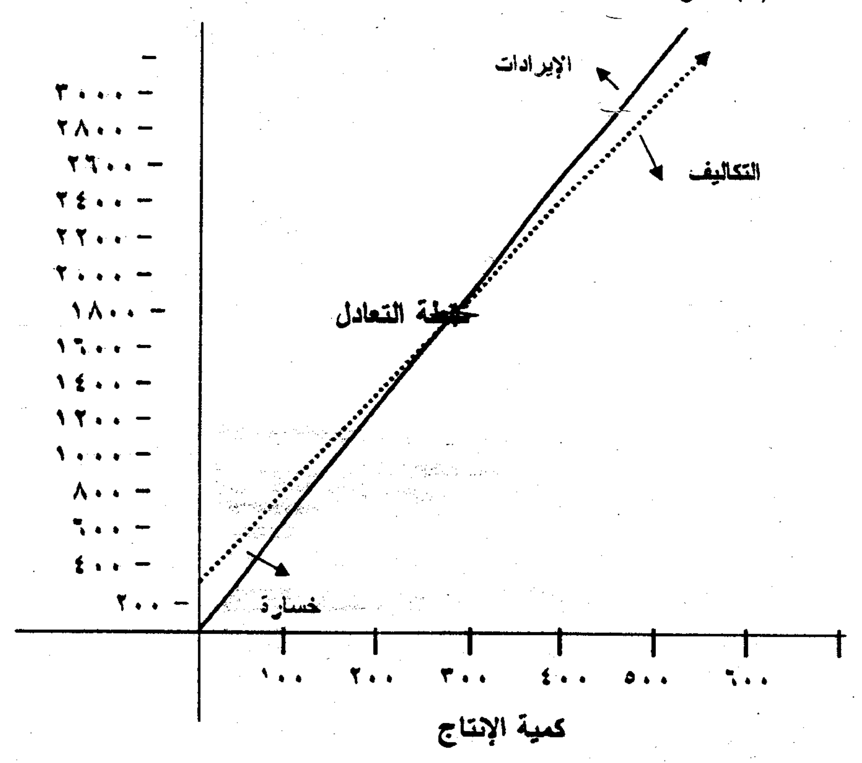
∴ الإيرادات = ٣٠٠ × ٦٠٠٠ = ١٨٠٠٠٠٠ جنيه

تمثيل البياني لنقطة التعادل :

حديد نقطة التعادل بيانياً يتم إفتراض قيم للوحدات المنتجة وتحديد قيم إيرادات الكلية والتكاليف الكلية عندها كما في الجدول التالي :

عدد الوحدات (١)	الإيرادات الكلية (٢) (١) × ٦٠٠٠	التكاليف المتغيرة (٣) (١)×٥٠٠٠	التكاليف الثابتة (٤)	التكاليف الكلية (٥) (٣)+(٤)
صفر	صفر	صفر	٣٠٠٠٠٠	٣٠٠٠٠٠
١٠٠	٦٠٠٠٠٠	٥٠٠٠٠٠	٣٠٠٠٠٠	٨٠٠٠٠٠
٢٠٠	١٢٠٠٠٠٠	١٠٠٠٠٠٠	٣٠٠٠٠٠	١٣٠٠٠٠٠
٣٠٠	١٨٠٠٠٠٠	١٥٠٠٠٠٠	٣٠٠٠٠٠	١٨٠٠٠٠٠
٤٠٠	٢٤٠٠٠٠٠	٢٠٠٠٠٠٠	٣٠٠٠٠٠	٢٣٠٠٠٠٠
٥٠٠	٣٠٠٠٠٠٠	٢٥٠٠٠٠٠	٣٠٠٠٠٠	٢٨٠٠٠٠٠

وبرسم الخانة (١) مع الخانة (٢) ينتج الخط المستقيم الممثل للإيرادات الكلية (وهو الخط المتصل في الرسم) ، ومن ناحية إخرى ، برسم الخانة (١) مع الخانة (٥) ينتج الخط المستقيم الممثل للتكاليف الكلية (وهو الخط المتقطع)



٢) **تحديد نسبة التعادل**

$$\text{نسبة التعادل} = \frac{\text{كمية التعادل}}{\text{الحد الأقصى للإنتاج}}$$

$$\therefore \text{نسبة التعادل} = \frac{٣٠٠}{٥٠٠} = ٦٠ \%$$

٣) تحديد التغير الذي يحدث :

◆ إذا إرتفع سعر بيع الوحدة من (٦٠٠٠) إلى (٧٠٠٠) جنيه

كمية التعادل = $\frac{300000}{7000-5000}$ = ١٥٠ وحدة

أي أن زيادة سعر بيع الوحدة يؤدي إلى إنخفاض كمية التعادل (والعكس صحيح)

◆ إذا إنخفضت التكاليف المتغيرة للوحدة الواحدة من (٥٠٠٠) إلى (٤٠٠٠) جنيه . فإن :

كمية التعادل = $\frac{300000}{6000-4000}$ = ١٥٠ وحدة

أي أن إنخفاض التكاليف المتغيرة للوحدة الواحدة يؤدي إلى إنخفاض كمية التعادل (والعكس صحيح)

◆ إذا زادت التكاليف الثابتة إلى (٥٠٠٠٠٠) جنيه ، فإن :

كمية التعادل = $\frac{500000}{6000-5000}$ = ٥٠٠ وحدة

أي أن زيادة التكاليف الثابتة يؤدي إلى زيادة كمية التعادل (والعكس صحيح)

مثال (٣)

من البيانات التالية المطلوب تحديد نقطة التعادل كمياً ومالياً :

(أ) تقدر التكاليف الثابتة السنوية للمشروع بمبلغ ٢٥٠٠٠٠ جنيه

(ب) متوقع بيع وحدة الإنتاج بسعر ٥٠ جنيه للوحدة في حين تبلغ تكلفتها المتغيرة ٤٠ جنيه.

(استخدم هامش المساهمة للوحدة وأيضاً نسبة هامش المساهمة)

الحل :

هامش المساهمة للوحدة = سعر البيع للوحدة – التكاليف المتغيرة

هـ = ع – م$_و$ = ٥٠ – ٤٠ = ١٠ جنيه

نسبة هامش المساهمة = هامش المساهمة ÷ سعر البيع للوحدة

$= \frac{١٠}{٥٠} =$ ٠,٢

نقطة التعادل كمياً = $\frac{\text{التكاليف الثابتة}}{\text{هامش المساهمة للوحدة}}$

$= \frac{٢٥٠٠٠٠}{١٠} =$ ٢٥٠٠٠ وحدة

نقطة التعادل مالياً = $\frac{\text{التكاليف الثابتة}}{\text{نسبة هامش المساهمة}}$

$= \frac{٢٥٠٠٠٠}{٠.٢} =$ ١٢٥٠٠٠٠ وحدة

ويمكن كذلك الوصول بضرب كمية مبيعات التعادل وهي ٢٥٠٠٠ وحدة × سعر بيع الوحدة وهو ٥٠ جنيه

حل آخر :

نقطة التعادل كمياً = $\frac{\text{التكاليف الثابتة}}{\text{سعر بيع الوحدة – التكاليف المتغيرة للوحدة}}$

$= \frac{٢٥٠٠٠٠}{٥٠ - ٤٠} =$ ٢٥٠٠٠٠ وحدة

$$\text{نقطة التعادل ماليا} = \frac{\text{التكاليف الثابتة}}{1 - \frac{\text{التكاليف المتغيرة للوحدة}}{\text{سعر بيع الوحدة}}}$$

$$\therefore \text{نقطة التعادل مالياً} = \frac{٢٥٠٠٠٠}{1 - \frac{٤٠}{٥٠}} = \frac{٢٥٠٠٠٠}{٠,٢} = ١٢٥٠٠٠٠ \text{ جنيه}$$

مثال (٤)

باعتبار كل من الحالتين التاليتين حالة مستقلة المطلوب تحديد نقطة التعادل :

(أ) إجمالي التكاليف الثابتة السنوية المتوقعة لأحد المشروعات تبلغ ٤٠٠٠٠٠ جنيه ومن المنتظر بيع الوحدة من المنتج بسعر ٦٠ جنيه في الوقت الذي تبلغ فيه تكلفة الوحدة المتغيرة المقدرة ٤٠ جنيه.

(ب) إجمالي التكاليف الثابتة السنوية المتوقعة لأحد المشروعات الإستثمارية تبلغ ٧٥٠٠٠٠ جنيه كما تبلغ قيمة المبيعات المقدرة ٣٠٠٠٠٠٠ جنيه وتبلغ التكاليف المتغيرة المقدرة للمبيعات ١٨٠٠٠٠٠ جنيه.

الحل :

(أ) يمكن تقدير نقطة التعادل كمياً ومالياً :

هامش المساهمة للوحدة = سعر البيع للوحدة – التكاليف المتغيرة

$$هـ = ع - م_و = ٦٠ - ٤٠ = ٢٠ \text{ جنيه}$$

$$\text{نقطة التعادل كمياً} = \frac{\text{التكاليف الثابتة}}{\text{هامش المساهمة للوحدة}}$$

$$= \frac{٤٠٠٠٠٠}{٢٠} = ٢٠٠٠٠ \text{ وحدة}$$

نسبة هامش المساهمة = $\frac{٢٠}{٦٠}$ = $\frac{١}{٣}$

نقطة التعادل مالياً = $\frac{\text{التكاليف الثابتة}}{\text{نسبة هامش المساهمة}}$

= $\frac{٤٠٠٠٠٠}{\frac{١}{٣}}$ = ١٢٠٠٠٠٠ جنيه

(ب) غير متاح الحصول على نقطة التعادل كمياً و يمكن تقديرها مالياً حيث :

نقطة التعادل مالياً = $\frac{\text{التكاليف الثابتة}}{\text{نسبة هامش المساهمة}}$

حيث :

هامش المساهمة = قيمة المبيعات المقدرة – تكلفة المبيعات المتغيرة المقدرة

= ٣٠٠٠٠٠٠ – ١٨٠٠٠٠٠

= ١٢٠٠٠٠٠ جنيه

نسبة هامش المساهمة = $\frac{\text{هامش المساهمة}}{\text{قيمة المبيعات المقدرة}}$

= $\frac{١٢٠٠٠٠٠}{٣٠٠٠٠٠٠}$ = ٠,٤

وعلى ذلك يكون :

نقطة التعادل مالياً = $\frac{٧٥٠٠٠٠}{٠,٤}$ = ١٨٧٥٠٠٠ جنيه

مثال (٥)

شركة المنصورة للبلاستيك بياناتها كالتالي :

- التكاليف الثابتة = ٦٠٠٠٠ جنيه
- حجم الإنتاج الذي يحقق ربح قدره ٤٠٠٠٠ جنيه = ٢٠٠٠٠٠ وحدة تمثل ٥٠٪ من الطاقة الكلية)
- الطاقة الكلية = ٤٠٠٠٠٠ وحدة

والمطلوب :

(١) حساب مبيعات التعادل ؟.

(٢) الربح عند كامل الطاقة؟

(٣) مستوى الطاقة المستغلة لتحقيق التعادل؟

(٤) إذا كان هناك تعديل يؤدي إلى زيادة التكاليف الثابتة بنسبة ٥٠٪ وخفض التكاليف المتغيرة بنفس النسبة . هل التعديل في صالح الشركة مع حجم انتاج افتراضي ٢٤٠٠٠٠ وحدة؟

حل :

= ٦٠٠٠٠ ، حجم الإنتاج الذي يحقق ربح قدره ٤٠٠٠٠ جنيه = ٢٠٠٠٠٠ وحدة ، ط = ٤٠٠٠٠٠ وحدة ، الربح = ح = ٤٠٠٠٠

طالما أن سعر البيع غير معلوم سنفترض أن ع = ١ جنيه

$$\therefore \text{نقطة التعادل} = \frac{ث}{ع - م_و} = \frac{٦٠٠٠٠}{١ - م_و}$$

ربح = (سعر البيع×حجم الإنتاج الذي يحقق ربح معين) – (حجم الإنتاج الذي يحقق ربح معين × التكاليف المتغيرة للوحدة) – التكاليف الثابتة

بالتعويض في المعادلة السابقة :

$$٤٠٠٠٠ = (١\times٢٠٠٠٠٠) - (٢٠٠٠٠٠\times م_و) - ٦٠٠٠٠$$

∴ ٤٠٠٠٠ = ٢٠٠٠٠٠ – ٢٠٠٠٠٠ م$_{و}$ – ٦٠٠٠٠

∴ ٤٠٠٠٠ – ١٤٠٠٠٠ = ٢٠٠٠٠٠ م$_{و}$

∴ – ١٠٠٠٠٠ = ٢٠٠٠٠٠ م$_{و}$

∴ التكاليف المتغيرة للوحدة (م$_{و}$) = ٠,٥

∴ حجم التعادل كمياً = $\frac{٦٠٠٠٠}{١-٠,٥}$ = ١٢٠٠٠٠ وحدة

♦ مستوى الطاقة المُستغلة لتحقيق التعادل =

= $\frac{\text{حجم التعادل}}{\text{الطاقة الكلية}}$ × ١٠٠ = $\frac{١٢٠٠٠٠}{٤٠٠٠٠٠}$ × ١٠٠ = ٣٠ ٪

♦ الربح عند كامل الطاقة = الربح عند ٤٠٠٠٠٠

= حجم الإنتاج الذي يحقق ربح معين(سعر البيع-التكاليف المتغيرة) – ث

= ٤٠٠٠٠٠(١-٠,٥) – ٦٠٠٠٠

= (٤٠٠٠٠٠ × ٠,٥) – ٦٠٠٠٠

= ٢٠٠٠٠٠ – ٦٠٠٠٠ = ١٤٠٠٠٠ جنيه

وعلى ذلك ، يكون :

(أولاً) قبل التعديل :

التكاليف الثابتة = ٦٠٠٠٠

التكاليف المتغيرة للوحدة (م$_{و}$) = ٠,٥ جنيه

حجم إنتاج افتراضي = ٢٤٠٠٠٠ وحدة.

الربح = حجم الإنتاج الذي يحقق ربح معين (سعر البيع-التكاليف المتغيرة) – ث

∴ ح = ٢٤٠٠٠٠ (١ -٠,٥) – ٦٠٠٠٠

= ١٢٠٠٠٠ – ٦٠٠٠٠ = ٦٠٠٠٠ جنيه

(ثانياً) بعد التعديل :

التكاليف الثابتة = ٩٠٠٠٠

التكاليف المتغيرة للوحدة ($م_{و}$) = ٠,٥ - (٠,٥×٥٠٪) = ٠,٢٥ جنيه

حجم إنتاج افتراضي = ٢٤٠٠٠٠ وحدة.

الربح = حجم الإنتاج الذي يحقق ربح معين (سعر البيع-التكاليف المتغيرة) - ث

∴ ح = ٢٤٠٠٠٠ (١-٠,٢٥) - ٩٠٠٠٠

= ١٨٠٠٠٠ - ٩٠٠٠٠ = ٩٠٠٠٠ جنيه

وعلى ذلك نجد أن التعديل يكون في مصلحة الشركة لأنه أدى إلى زيادة أرباحها بمقدار ٣٠٠٠٠ جنيه.

مثال (٦)

تنتج شركة إيديال ثلاث أنواع من الثلاجات بياناتها كما يلي :

النوع	الكمية بالوحدات	سعر بيع الوحدة بالألف ج	التكلفة المتغيرة الكلية بالألف ج
٦ قدم	٢٠٠٠	٤	٢
٨ قدم	٤٠٠٠	٨	٦
١٢ قدم	٨٠٠٠	١٤	١٠

وكانت التكاليف الثابتة = ٢٠٠٠٠ جنيه

المطلوب : حساب حجم التعادل (نقطة التعادل) وكذلك الربح المحقق إذا زادت المبيعات بنسبة ٥٠ ٪ ؟.

الحل :

حساب المتوسط المرجح للوحدة لكل من سعر البيع والتكلفة المتغيرة على النحو التالي :

النوع	الكمية ن	سعر بيع الوحدة ع	قيم المبيعات	التكلفة المتغيرة للوحدة	التكلفة المتغيرة الكلية
٦ قدم	٢٠٠٠	٤	٨٠٠٠	٢	٤٠٠٠
٨ قدم	٤٠٠٠	٨	٣٢٠٠٠	٦	٢٤٠٠٠
١٢ قدم	٨٠٠٠	١٤	١١٢٠٠٠	١٠	٨٠٠٠٠
المجموع	١٤٠٠٠		١٥٢٠٠٠		١٠٨٠٠٠

$$\text{سعر البيع المرجح للوحدة} = \frac{\text{قيمة المبيعات الكلية}}{\text{كمية المبيعات الكلية}}$$

$$= \frac{١٥٢٠٠٠}{١٤٠٠٠} = ١٠,٨٦ \text{ جنيه.}$$

$$\text{التكلفة المتغيرة للوحدة المرجحة} = \frac{\text{التكلفة المتغيرة الكلية}}{\text{كمية المبيعات الكلية}}$$

$$= \frac{١٠٨٠٠٠}{١٤٠٠٠} = ٧,٧١ \text{ جنيه.}$$

$$\therefore \text{نقطة التعادل (حجم التعادل)} = \frac{ث}{ع - م_و} = \frac{٢٠٠٠٠}{١٠,٨٦ - ٧,٧١}$$

$$= \frac{٢٠٠٠٠}{٣,١٥} = ٦٣٤٩ \text{ وحدة}$$

وعند زيادة المبيعات بنسبة ٥٠ ٪

أي : ٦٣٤٩ × ١,٥ = ٩٥٢٤ وحدة

$\therefore$ الربح = كمية المبيعات $(ع - م_و)$ − ث

$\therefore$ ح = ٩٥٢٤ (١٠,٨٦ − ٧,٧١) − ٢٠٠٠٠

$\therefore$ ح = ٩٥٢٤ × ٣,١٥ − ٢٠٠٠٠

= ٣٠٠٠٠,٦ − ٢٠٠٠٠ = ١٠٠٠٠,٦ جنيه

مثال (٧)

إذا توافرت لديك البيانات التالية لإحدى الشركات :

- حجم الإنتاج الذي يحقق ربح معين = ٢٠٠٠٠٠ وحدة
- التكاليف المتغيرة الكلية = ١٠٠٠٠٠ جنيه
- التكاليف الثابتة = ٨٠٠٠٠ جنيه
- الشركة تعمل بنصف طاقتها

والمطلوب إيجاد :

(١) نقطة التعادل ؟.

(٢) معدل الأمان ؟

(٣) مستوى الطاقة المستغلة لمضاعفة الربح الحالي؟

الحل :

- نقطة التعادل = $\frac{ث}{ع - م_و}$ التكاليف المتغيرة الكلية (م)

التكاليف المتغيرة للوحدة الواحدة = $م_و$ = التكاليف المتغيرة الكلية ÷ حجم الإنتاج الذي يحقق ربح معين = ١٠٠٠٠٠ ÷ ٢٠٠٠٠٠ = ٠,٥ جنيه.

وطالما أن سعر البيع غير معلوم سنفترض أن ع = ١ جنيه.

∴ نقطة التعادل = $\frac{ث}{ع - م_و} = \frac{٨٠٠٠٠}{١ - ٠,٥} =$ ١٦٠٠٠٠ وحدة

$$\text{درجة الأمان} = \frac{\text{الإنتاج المباع} - \text{نقطة التعادل}}{\text{الطاقة الكلية}} \times ١٠٠$$

$$= \frac{٢٠٠٠٠٠ - ١٦٠٠٠٠}{٤٠٠٠٠٠} \times ١٠٠ = ١٠ \%$$

الربح الحالي = حجم الإنتاج الذي يحقق ربح معين (ع- م و) - ث

∴ ح = ٢٠٠٠٠٠ (١-٠,٥) - ٨٠٠٠٠

∴ ح = ٢٠٠٠٠٠ × ٠,٥ - ٨٠٠٠٠

= ١٠٠٠٠٠ - ٨٠٠٠٠ = ٢٠٠٠٠ جنيه

الربح المضاعف = ٢٠٠٠٠ × ٢ = ٤٠٠٠٠ جنيه

نسبة الطاقة المُستغلة لمضاعفة الربح =

$$= \frac{\text{التكاليف الثابتة + الربح}}{\text{الطاقة الكلية (سعر البيع - التكاليف المتغيرة للوحدة)}} \times ١٠٠$$

$$= \frac{٨٠٠٠٠ + ٤٠٠٠٠}{٤٠٠٠٠٠ (١-٠,٥)} \times ١٠٠ = ٦٠ \%$$

ويشير ذلك أنه إذا رغبت الشركة مضاعفة ربحها الحالي عليها زيادة استغلال طاقتها بنسبة ١٠٪ حيث أنها تستغل ٥٠٪ فقط.

تمارين على تحليل نقطة التعادل

(١) مطلوب تحديد نقطة التعادل كمياً ومالياً ، مع تحديد النقطة التي يتحقق عندها أرباح صافية قدرها ٧٥٠٠٠ جنيه وذلك من واقع البيانات المتاحة التالية :

- التكاليف الثابتة سنوياً تُقدر بمبلغ ٤٥٠٠٠ جنيه
- قيمة المبيعات ٢٠٠٠٠٠ جنيه ، وبلغت تكلفة المبيعات المتغيرة ١٢٥٠٠٠ جنيه ؟
- سعر بيع الوحدة ٢٠ جنيه

(٢) مطلوب تحديد التكاليف الثابتة سنوياً وذلك من واقع البيانات المتاحة التالية :

- نقطة التعادل كمياً ٢٠٠٠٠ وحدة
- قيمة المبيعات المقدرة والتكاليف المتغيرة المرتبطة بها ٢١٠٠٠٠ جنيه ، ١٤٠٠٠٠ جنيه على الترتيب
- حجم المبيعات ٣٥٠٠٠ وحدة

(٣) إحسب نقطة التعادل من واقع البيانات التالية :

- التكاليف الثابتة سنوياً ١٠٠٠٠٠ جنيه
- قيمة المبيعات ٤٠٠٠٠٠ جنيه
- تكلفة المبيعات المتغيرة ١٥٠٠٠٠ جنيه ؟
- سعر بيع الوحدة ٥٠ جنيه

وإذا رغبت المنشأة في تحقيق أرباح صافية قدرها ٩٠٠٠٠ جنيه. فما هو حجم المبيعات اللازم لتحقيق ذلك؟

(٤) إحسب نقطة التعادل في الحالات التالي :

(أ) التكاليف الثابتة ١٥٠٠٠٠ جنيه ، سعر بيع الوحدة ١٣٠٠ جنيه ، والتكلفة المتغيرة للوحدة ٨٠٠ جنيه ؟

(ب) حالة زيادة التكلفة المتغيرة ١٠٪ ، وخفض سعر البيع ١٥٪ مستخدماً البيتات في (أ) .

(جـ) إجمالي التكلفة الثابتة ١٠٠٠٠٠ جنيه ، وقيمة المبيعات المقدرة ٣٠٠٠٠٠ جنيه ، والتكلفة المتغيرة المقدرة للمبيعات ١٥٠٠٠٠ جنيه .

(٥) شركة الوفاق لإنتاج السيراميك بياناتها كالتالي :

التكاليف الثابتة = ٣٠٠٠٠ جنيه

حجم الإنتاج الذي يحقق ربح قدره ٢٠٠٠٠ جنيه = ١٠٠٠٠٠ وحدة (تمثل ٥٠٪ من الطاقة الكلية)

الطاقة الكلية = ٢٠٠٠٠٠ وحدة

والمطلوب :

(١) حساب مبيعات التعادل ؟.

(٢) الربح عند كامل الطاقة؟

(٣) مستوى الطاقة المستغلة لتحقيق التعادل؟

(٤) إذا كان هناك تعديل يؤدي إلى زيادة التكاليف الثابتة بنسبة ٥٠٪ وخفض التكاليف المتغيرة بنفس النسبة . هل التعديل في صالح الشركة مع حجم انتاج افتراضي ١٢٠٠٠٠ وحدة؟

(٦) تنتج إحدى الشركات ٣ أنواع من صبغات الشعر للسيدات بيـ..ـا كما يلي:

النوع	الكمية بالوحدات	سعر بيع الوحدة	التكلفة المتغيرة للوحدة
أ	٥٠٠	٣	١
ب	١٠٠٠	٤	٦
جـ	٢٠٠٠	٥	٨

وكانت التكاليف الثابتة = ٨٠٠٠ جنيه

المطلوب : حساب نقطة التعادل وكذلك الربح المحقق إذا زادت المبيعات بنسبة ٧٥ ٪ ؟.

(٧) شركة روتانا كانت بياناتها كما يلي :

- حجم الإنتاج لربح معين = ٣٠٠٠٠٠ وحدة
- التكاليف المتغيرة الكلية = ١٥٠٠٠٠ جنيه
- التكاليف الثابتة = ٢٤٠٠٠٠ جنيه

والمطلوب إيجاد : .

١- نقطة التعادل ؟.

٢- معدل الأمان ؟

٣- مستوى الطاقة المستغلة لمضاعفة الربح الحالي؟ علماً بـأن الشركة تعمل بنصف طاقتها.

(٨) إذا كانت التكاليف الثابتة الكلية (ث) = ٥٠٠٠٠٠

التكاليف المتغيرة للوحدة (مو) = ٦٠٠٠ جنيه

سعر بيع الوحدة = ٩٠٠٠ جنيه .

الحد الأقصى للإنتاج = ٦٠٠ وحدة

المطلوب : تحديد نقطة التعادل ونسبة التعادل ؟.

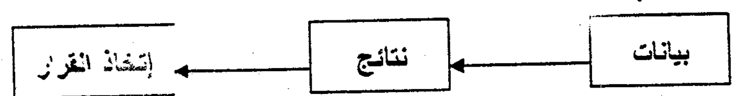
الفصل الرابع

نظرية اتخاذ القرارات

Decisions Making Theory

لقد أصبح الإحصاء الآن علم اتخاذ القرارات في مواجهة عدم توافر المعلومات الكافية ، والمؤسسات التي لا تعتمد على الأسلوب الإحصائي في اتخاذ قراراتها تجاه مشكلة معينة تصاب بالفشل الذريع ، فالإدارة في العصر الحديث قد تغير مفهومها القديم الإجتهادي إلى أسلوب علمي منظم يعتمد على ذوي الكفايات للقيام بإدارة المؤسسات والشركات حتى تصل بالمجتمع إلى التقدم والرقي ، فيمكن للمنشأة أن تستخدم الأساليب الإحصائية للوصول إلى غايتها فى اتخاذ القرارات التجارية الخاصة ببيع وشراء المنتجات وتحديد أجور العاملين بها وكذلك شراء الأصول الثابتة، ... إلخ. وباستخدام العينات تستطيع الشركة أو المؤسسة معرفة خواص ومعالم المجتمع مما يمكنها من توفير الوقت والجهد والتكاليف في اتخاذ قراراتها التجارية.

القرار الإحصائي : اختيار خطة من مجموعة من الخطط الممكن تنفيذها عملياً والتى تعطي أكبر القيم المتوقعة ، أي التى تعطي أحسن النتائج ، والذي يقوم باتخاذ القرارات هو مدير المؤسسة ويقوم بعملية التنفيذ مدير آخر يعاونه قوة من الموظفين. فعند اتخاذ قرار بمشكلة معينة تحدد الخطط الممكن تنفيذها عملياً مثل الخطط أ، ، أ، ، أ، ، ... ، وهذه الخطط متنافية فيما بينها وتكون خاضعة لرقابة متخذ القرارات ، وتكون لا تخالف السياسة العامة للشركة أو قوانين الدولة أو الآداب العامة ، ثم تجمع بيانات عن هذه الخطط تؤدي إلى معرفة نتائج كل خطة ، وبعد ذلك يُتخذ القرار باختيار الخطة المناسبة التي تحقق غرض المنشأة ، أي الخطة التي تعطي أحسن النتائج المرغوب فيها.



حالات الطبيعة :

هناك عوامل خاضعة لرقابة متخذ القرار مثل موارد الشركة ، ولكن هناك عوامل أخرى ليست خاضعة لرقابة متخذ القرار ، وهذه العوامل تسمى حالات الطبيعة مثل الرواج والكساد أو حالات الجو أو ... إلخ

فهذه الحالات ليست خاضعة لرقابة متخذ القرار ، ويجب عليه أن يأخذ فى الحسبان جميع حالات الطبيعة لكل خطة ، وعلى ذلك يمكن تصوير عملية اتخاذ القرارات في صورة مصفوفة رياضية ، والمصفوفة الرياضية عبارة عن صفوف وأعمدة مكونة من أرقام مرتبة ترتيباً رأسياً وأفقياً ، فتُوضع الخطط الممكنة في الصفوف مرتبة أيضاً وحالات الطبيعة في الأعمدة ، أما الأرقام داخل هذه المصفوفة فتمثل قياس المنفعة الناتجة عن خطة معينة وحالة من حالات الطبيعة ، فإذا كان لدينا ثلاث خطط أ$_{١}$ ، أ$_{٢}$ ، أ$_{٣}$ ، وثلاث حالات طبيعة ط$_{١}$ ، ط$_{٢}$ ، ط$_{٣}$ ، وقياس المنفعة ف$_{١١}$ ، ف$_{٢١}$ ، .... ، ف$_{٣٣}$ ،

		حالات الطبيعة		
		ط$_{١}$	ط$_{٢}$	ط$_{٣}$
	أ$_{١}$	ف$_{١١}$	ف$_{٢١}$	ف$_{٣١}$
الخطط	أ$_{٢}$	ف$_{١٢}$	ف$_{٢٢}$	ف$_{٣٢}$
	أ$_{٣}$	ف$_{١٣}$	ف$_{٢٣}$	ف$_{٣٣}$

ويقوم متخذ القرار باختيار خطة واحدة من بين هذه الخطط ، وهو يعتمد فى ذلك على الخبرة الماضية والحاضرة للتنبؤ بالنتائج الخاصة بكل خطة ، لأن نتيجة هذه الخطط متقلبة ولا يمكن التنبؤ بما سيحصل فعلاً بسبب عدم وجود معلومات كافية بما سيحدث مستقبلاً.

النماذج المستخدمة لاتخاذ القرارات :

نموذج التأكد : وفيه يعرف متخذ القرارات بالتأكيد حالة الطبيعة ستحدث في المستقبل ويختار الخطة التي تعطي أكبر منفعة متوقعة ، أي يوجد في المصفوفة الرياضية عمود واحد فقط يمثل حالات الطبيعة .

الخطة	المنفعة المتوقعة (في حالة تأكد تام)
$أ_1$	٤٠٠٠
$أ_2$	٥٠٠٠
$أ_3$	٢٠٠٠

وفي هذا النموذج يختار متخذ القرار الخطة التي أمامها أكبر رقم في عمود حالات الطبيعة ، وفي مثالنا السابق يختار الخطة الثانية $أ_2$

نموذج المخاطرة : وفيه يعرف متخذ القرارات احتمال حدوث كل حالة من حالات الطبيعة ويختار الخطة التي تعطي أكبر القيم للمنفعة أو أقل خسارة متوقعة .

مثال (١)

محلات السلام ترغب فى معرفة عدد صناديق الشاي الواجب الإحتفاظ بها لمقابلة طلبات الأسبوع القادم ، ومن الخبرة السابقة تبين أن التوزيع الإحتمالي للمبيعات كما يلي :

عدد صناديق الشاي	١٠	١١	١٢	١٣
الإحتمال	٠,٢	٠,٣	٠,٤	٠,١

فإذا كان سعر بيع الصندوق ٨ جنيهات وسعر تكلفة الصندوق ٦ جنيهات ، والمنتجات التي لا تُباع أثناء الأسبوع تصبح لا قيمة لها .

١. إحسب المبيعات المتوقعة لهذا الأسبوع؟ :

٢. ما هو القرار الأمثل للكمية الواجب الإحتفاظ بها؟ :

الحـــل :

١- المبيعات المتوقعة = ٠,٢×١٠ + ٠,٣×١١ + ٠,٤×١٢ + ٠,١×١٣

= ١١,٤

٢- تحدد الأرباح الشرطية في مصفوفة رياضية كالآتي :

الطلبات المتوقعة

	ط١	ط٢	ط٣	ط٤
	١٠	١١	١٢	١٣
تخزين ١٠ : أ١	٢٠	٢٠	٢٠	٢٠
تخزين ١١ : أ٢	١٤	٢٢	٢٢	٢٢
تخزين ١٢ : أ٣	٨	١٦	٢٤	٢٤
تخزين ١٣ : أ٤	٢	١٠	١٨	٢٦

إيجاد القيم المتوقعة للأرباح الشرطية للخطط المختلفة :

ق م (أ١) = ٠,٢×٢٠ + ٠,٣×٢٠ + ٠,٤×٢٠ + ٠,١×٢٠

= ٤ + ٦ + ٨ + ٢ = ٢٠

ق م (أ٢) = ٠,٢×١٤ + ٠,٣×٢٢ + ٠,٤×٢٢ + ٠,١×٢٢

= ٢,٨ + ٦,٦ + ٨,٨ + ٢,٢ = ٢٠,٤

ق م (أ٣) = ٠,٢×٨ + ٠,٣×١٦ + ٠,٤×٢٤ + ٠,١×٢٤

= ١,٦ + ٤,٨ + ٩,٦ + ٢,٤ = ١٨,٤

ق م (أ٤) = ٠,٢×٢ + ٠,٣×١٠ + ٠,٤×١٨ + ٠,١×٢٦

= ٠,٤ + ٣ + ٧,٢ + ٢,٦ = ١٣,٢

القرار الأمثل للكمية الواجب الإحتفاظ بها هو ١١ صندوق من الشاي حيث أن الخطة الثانية تعطي أكبر قيمة متوقعة وهي ٢٠,٤

ويمكن عمل مصفوفة رياضية لفرص الخسارة الشرطية هي كميـــة المخـــزون الزائد عن حاجة الطلب ، كذلك الأرباح التي لم تتحقق لعدم تخزين الـــصناديق الكافية لمقابلة الطلب ٠

	الطلبات المتوقعة			
	$ط_{١}$	$ط_{٢}$	$ط_{٣}$	$ط_{٤}$
	١٠	١١	١٢	١٣
	٠,٢	٠,٣	٠,٤	٠,١
تخزين ١٠ : $أ_{١}$	صفر	٢	٤	٦
تخزين ١١ : $أ_{٢}$	٦	صفر	٢	٤
تخزين ١٢ : $أ_{٣}$	١٢	٦	صفر	٢
تخزين ١٣ : $أ_{٤}$	١٨	١٢	٦	صفر

ق٠م ($أ_{١}$) = صفر×٠,٢ + ٢×٠,٣ + ٤×٠,٤ + ٦×٠,١

= صفر + ٠,٦ + ١,٦ + ٠,٦ = **٢,٨**

ق٠م ($أ_{٢}$) = ٦×٠,٢ + صفر×٠,٣ + ٢×٠,٤ + ٤×٠,١

= ١,٢ + صفر + ٠,٨ + ٠,٤ = **٢,٤**

ق٠م ($أ_{٣}$) = ١٢×٠,٢ + ٦×٠,٣ + صفر×٠,٤ + ٢×٠,١

= ٢,٤ + ١,٨ + صفر + ٠,٢ = **٤,٤**

ق٠م ($أ_{٤}$) = ١٨×٠,٢ + ١٢×٠,٣ + ٦×٠,٤ + صفر×٠,١

= ٣,٦ + ٣,٦ + ٢,٤ + صفر = **٩,٦**

القرار الأمثل للكمية الواجب الإحتفاظ بها هو ١١ صندوق من الشاي حيث أن الخطة الثانية تعطي أقل خسارة متوقعة وهي ٢,٤

نموذج عدم التأكد : وفيه يجهل متخذ القرارات احتمال حدوث كل حالة من حالات الطبيعة حيث أنه لا يوجد أساس يمكن الإعتماد عليه من الخبرة السابقة لتقدير هذه الإحتمالات.

ويُستعان ببعض المقاييس الآتية :

١. مقياس التشاؤم (أكبر الأقل)
٢. مقياس التفاؤل (أكبر الأكبر)
٣. مقياس الأسف (أقل الأكبر)
٤. متساوي الإحتمالات

مثال (٢)

إذا كان لدينا المصفوفة الرياضية التالية :

	$ط_1$	$ط_2$	$ط_3$
$أ_1$	٢٠	٣	−١
$أ_2$	١٠	٥	١

فما هو القرار الواجب اتخاذه ؟

الحل :

١- مقياس التشاؤم : (أكبر الأقل) :

وفى هذه الحالة ينظر متخذ القرار إلى المستقبل نظرة تشاؤمية أي أن الحالة التي ستسود مستقبلاً ستكون أسوأ الحالات. ويمكن ترتيب هذه النتائج كالآتي:

الخطة	أسوأ الحالات (أقل الأرباح)
$أ_1$	−١
$أ_2$	١

وطبقا لهذا المقياس فإن متخذ القرار يختار أكبر أقل الأرباح ، ويساوي ١ ، أي سيختار الخطة الثانية $أ_2$

٢ - مقياس التفاؤل : (أكبر الأكبر) :

وفى هذه الحالة ينظر متخذ القرار إلى المستقبل بتفاؤل تام أي أن الحالة التي ستسود مستقبلاً ستكون أحسن الحالات. ويمكن ترتيب هذه النتائج كالآتي:

الخطة	أحسن الحالات (أكبر الأرباح)
$أ_1$	٢٠
$أ_2$	١٠

وطبقا لهذا المقياس فإن متخذ القرار يختار أكبر أكبر الأرباح ، ويساوي ٢٠ ، أي سيختار الخطة الأولى $أ_1$ ، ولكن هرويز قال أنه لا يجب أن يكون متخذ القرار متفائلاً تفاؤلاً تاماً ، وعدل المقياس السابق بإدخال فكرة معامل التفاؤل بأن يأخذ متخذ القرار أكبر وأقل القيم في المصفوفة الرياضية وأن يرجح كل حالة طبقاً لتقديره للتفاؤل ، فإذا فرضنا ان معامل التفاؤل ٠,٨ ، فإنه في هذه الحالة نوجد القيمة المتوقعة لكل خطة كما يلي :

الخطة	الأكبر (إحتمال ٠,٨)	الأقل (إحتمال ٠,٢)
$أ_1$	٢٠	-١
$أ_2$	١٠	١

والقيم المتوقعة للخطتين ستكون كما يلي :

ق٠م ($أ_1$) = ٢٠×٠,٨ + (-١)×٠,٢

= ١٦ - ٠,٢ = **١٥,٨**

ق٠م ($أ_2$) = ١٠×٠,٨ + ١×٠,٢

= ٨ + ٠,٢ = **٨,٢**

وطبقا لهذا المقياس يجب على متخذ القرار أن يختار الخطة التي تحقق أكبر قيمة متوقعة وهى الخطة الأولى $أ_1$

٣- مقياس الأسف :

وفى هذه الحالة يتم إنشاء مصفوفة للأسف لإيجاد مقدار الأسف الذي تشعر به الشركة نتيجة لاختيار خطة معينة ثم حدوث حالة طبيعية فعلاً ، فمثلاً إذا سارت حالة الطبيعة الأولى وقد اختارت المؤسسة فعلاً الخطة الأولى فإنها لن تشعر بأي أسف ، أما إذا سارت حالة الطبيعة الثانية وقد اختارت المؤسسة فعلاً الخطة الأولى فإنها تشعر بأسف مقداره ٢٥ ، وهكذا يظهر ذلك في مصفوفة الأسف التالية :

	$ط_1$	$ط_2$	$ط_3$
$أ_1$	صفر	٢	٢
$أ_2$	١٠	صفر	صفر

وطبقاً لمقياس أكبر الأقل فإن متخذ القرار سينظر إلى المستقبل بتشاؤم بالغ ، ولهذا فإنه سيختار الخطة التي تناظر أقل أسوأ الحالات (أقل الأكبر) ، ويمكن ترتيب هذه النتائج كالآتي:

الخطة	أسوأ الحالات (أكبر الأسف)
$أ_1$	٢
$أ_2$	١٠

وطبقا لهذا المقياس يجب على متخذ القرار أن يختار الخطة التي تعطيه أقل قيم أسوأ الحالات وهى تسوي ٢ ، وعلى ذلك سيختار الخطة الأولى $أ_1$

٤- مقياس تساوي الإحتمالات :

فى حالة جهل متخذ القرار عن احتمال وقوع حالة معينة من حالات الطبيعة فإنه يفترض احتمال متساوي لجميع الحالات، وعلى ذلك يقوم بإيجاد القيمة المتوقعة لكل خطة ثم يختار الخطة التي تعطيه أكبر قيمة متوقعة كما يلي (على أساس أن احتمال كل حالة من حالات الطبيعة = $\frac{١}{٣}$)

ق٠م (أ١) = ٢٠ × ١/٣ + ٣ × ١/٣ + (−١) × ١/٣

= ٦,٦٧ + ١ − ٠,٣٣ = **٧,٣٤**

ق٠م (أ٢) = ١٠ × ١/٣ + ٥ × ١/٣ + ١ × ١/٣

= ٣,٣٣ + ١,٦٧ + ٠,٣٣ = **٥,٣٣**

أي أن متخذ القرار أن سيختار الخطة التي تعطيه أكبر قيمة متوقعة وهى الخطة الأولى أ١

مثال (٣)

الشركة المصرية للإستثمارات بالمنصورة قررت استثمار مبلغ مليون جنيه في أحد المشروعات التالية ، ففامت الإدارة بجمع المعلومات التالية عن ثلاث مشروعات قابلة للتنفيذ وهي :

☒ المشروع الأول : تقوم الشركة بشراء قطعة أرض في منطقة ساحلية بهدف بيعها بعد عام للمستثمرين في القرى السياحية ويتوقف ثمن البيع على الحالة الإقتصادية التى ستسود في وقت البيع ، فإذا كانت الحالة الإقتصادية في رواج فإن الشركة يمكنها بيع الأرض بمبلغ ١,٨ مليون جنيه ، أما إذا بقيت الحالة الإقتصادية على وضعها الحالي فإن الشركة تبيع الأرض بمبلغ ٩٠٠٠٠٠ جنيه ، أما في حالة الكساد الإقتصادي فإن الشركة تبيع الأرض بمبلغ ٥٠٠٠٠٠ جنيه٠

☒ المشروع الثاني : تقوم الشركة بشراء بضاعه تتمثل في قطع غيار السيارات لتخزينها ثم بيعها بعد عام ، فإذا كانت الحالة الإقتصادية في رواج فإن الشركة يمكنها البيع بمبلغ ١,١٣٥ مليون جنيه ، وإذا بقيت الحالة الإقتصادية مستقرة كما هي الآن فإن الشركة يمكنها البيع بمبلغ ١,٠٩ مليون جنيه ، أما في حالة الكساد الإقتصادي فإن ثمن البيع سيكون ١,٠٦ مليون جنيه٠

☒ المشروع الثالث : تقوم الشركة بشراء سندات حكومية بسعر فائدة ثابت قدره ٨%سنوياً وتستثمر فيه كل المبلغ المتاح لديها .

فإذا اجتمع مجلس إدارة الشركة لاتخاذ قرار بشأن طرق استثمار مبلغ مليون جنيه ، فما هو القرار الأمثل الذي يمكن اتخاذه ؟.

الحل :

يمكن تلخيص البيانات الخاصة بهذا المثال في مصفوفة أرباح في ظل حالات الطبيعة (الرواج ط١ ، والإستقرار ط٢ ، والكساد ط٣) على النحو التالي :

الخطة \ حالات الطبيعة		ط١	ط٢	ط٣
الخطط	أ١	٨٠٠	-١٠٠	-٥٠٠
	أ٢	١٣٥	٩٠	٦٠
	أ٣	٨٠	٨٠	٨٠

إختيار الطرقة التي تُستخدم قبل اتخاذ القرار وهي :

١- طريقة التفاؤل التام ٢- طريقة التشاؤم

٣- طريقة درجة التفاؤل (معيار هرويز) وليكن معامل التفاؤل ٠,٤ مثلاً

٤- طريقة الأسف ٥- طريقة تساوي الإحتمالات (لابلاس)

١- طريقة التفاؤل : (أكبر الأكبر) :

الخطة	أحسن الحالات (الأكبر)
أ١	٨٠٠
أ٢	١٣٥
أ٣	٨٠

وتكون الخطة الواجبة التنفيذ هي الخطة الأولى أ١ ، أي أكبر الأكبر ، أي شراء الأرض.

٢- طريقة التشاؤم : (أكبر الأقل) :

الخطة	أسوأ الحالات (الأقل)
$أ_١$	- ٥٠٠
$أ_٢$	٦٠
$أ_٣$	٨٠

وتكون الخطة الواجبة التنفيذ هي الخطة الثالثة $أ_٣$ ، أي أكبر الأقل ، أي شراء سندات حكومية .

٣- طريقة درجة التفاؤل (٠,٤) :

الخطة	أحسن الحالات (٠,٤)	أسوأ الحالات (٠,٦)
$أ_١$	٨٠٠	- ٥٠٠
$أ_٢$	١٣٥	٦٠
$أ_٣$	٨٠	٨٠

والقيم المتوقعة للخطط الثلاث ستكون كما يلي :

ق.م ($أ_١$) = ٠,٤×٨٠٠ + (-٥٠٠)×٠,٦ = ٢٠

ق.م ($أ_٢$) = ٠,٤×١٣٥ + ٠,٦×٦٠ = ٩٠

ق.م ($أ_٣$) = ٠,٤×٨٠ + ٠,٦×٨٠ = ٨٠

وتكون الخطة الواجبة التنفيذ هي الخطة الثانية $أ_٢$ ، لأنها تمثل أكبر قيمة متوقعة ، أي شراء البضاعة .

٢- طريقة الأسف :

إنشاء مصفوفة الأسف:

		حالات الطبيعة		
		$ط_١$	$ط_٢$	$ط_٣$
الخطط	$أ_١$	صفر	١٩٠	٥٨٠
	$أ_٢$	٦٦٥	صفر	٢٠
	$أ_٣$	٧٢٠	١٠	صفر

الخطة	أكبر الأسف
$أ_١$	٥٨٠
$أ_٢$	٦٦٥
$أ_٣$	٧٢٠

وتكون الخطة الواجبة التنفيذ هي الخطة الأولى $أ_١$ ، أي شراء الأرض ، لأنها أقل أسف (أقل الأكبر).

٥- طريقة تساوي الإحتمالات :

نعطي لكل حالة احتمال قدره $\frac{١}{٣}$ وعلى ذلك يقوم بإيجاد القيمة المتوقعة لكل خطة كما يلي :

والقيم المتوقعة للخطط الثلاث ستكون كما يلي :

$$ق.م (أ_١) = \frac{١}{٣} (٨٠٠ - ١٠٠ - ٥٠٠) = \boxed{٦٦,٦٧}$$

$$ق.م (أ_٢) = \frac{١}{٣} (١٣٥ + ٩٠ + ٦٠) = \boxed{٩٥}$$

$$ق.م (أ_٣) = \frac{١}{٣} (٨٠ + ٨٠ + ٩٠) = \boxed{٨٠}$$

وسنجد أن أكبر قيمة متوقعة هي ٩٥ وهي تصاحب الخطة الثانية ، وعلى ذلك يكون القرار المناسب هو تنفيذ الخطة $أ_٢$ وهو شراء بضاعة.

مثال (٤)

إذا كان التوزيع الإحتمالي لبيع أحد الكتب في مكتبة الجلاء الجديدة بالمنصورة على النحو التالي:

عدد الكتب	١٠	١٥	٢٠
الإحتمال	٠,٢	٠,٥	٠,٣

وتقوم المكتبة بشراء النسخة من الناشر بمبلغ ٣ جنيهات ويتم بيعها بمبلغ ٥ جنيهات ، والنسخة التي لا تباع تُرد للناشر وتحصل المكتبة على مبلغ ٢ جنيه للنسخة ، والمطلوب إيجاد السياسة المثلى التي يمكن للمكتبة اتخاذها؟.

الحل :

تسعى المكتبة إلى تحقيق أكبر عائد ممكن ، وأمام البائع ثلاث سياسات (خطط أو استراتيجيات) :

☒ أ١ : شراء ١٠ نسخ وعرضها للبيع.

☒ أ٢ : شراء ١٥ نسخة وعرضها للبيع.

☒ أ٣ : شراء ٢٠ نسخة وعرضها للبيع.

ولتحديد أي سياسة على المكتبة تحديد العائد المحتمل عن كل سياسة مع مواجهة حالات الطبيعة وهي :

☒ ط١ : حالة البيع باحتمال ٠,٢

☒ ط٢ : حالة البيع باحتمال ٠,٥

☒ ط٣ : حالة البيع باحتمال ٠,٣

ويُحسب العائد كما يلي :

العائد = (عدد الوحدات المُباعة × ثمن البيع) + (عدد الوحدات المردودة × ثمن المسترد) – (عدد الوحدات المشتراة × ثمن الشراء)

(١) عند اتخاذ سياسة بشراء ١٠ نسخ من الكتاب لبيعها :

☒ العائد عند ط١ = ١٠×٥ + صفر×٢ – ١٠×٣ = ٢٠ جنيه

☒ العائد عند ط٢ = ١٠×٥ + صفر×٢ – ١٠×٣ = ٢٠ جنيه

☒ العائد عند ط٣ = ١٠×٥ + صفر×٢ – ١٠×٣ = ٢٠ جنيه

(٢) عند اتخاذ سياسة بشراء ١٥ نسخة من الكتاب لبيعها :

☒ العائد عند ط١ = ١٠×٥ + ٥×٢ – ١٥×٣ = ١٥ جنيه

☒ العائد عند ط٢ = ١٥×٥ + صفر×٢ – ١٥×٣ = ٣٠ جنيه

☒ العائد عند ط٣ = ١٥×٥ + صفر×٢ – ١٥×٣ = ٣٠ جنيه

(٣) عند اتخاذ سياسة بشراء ٢٠ نسخة من الكتاب لبيعها :

☒ العائد عند $ط_1$ = ١٠×٥ + ١٠×٢ − ٢٠×٣ = ١٠ جنيه

☒ العائد عند $ط_2$ = ١٥×٥ + ٥×٢ − ٢٠×٣ = ٢٥ جنيه

☒ العائد عند $ط_3$ = ٢٠×٥ + صفر×٢ − ٢٠×٣ = ٤٠ جنيه

جدول العائد (الأرباح) :

الإحتمالات وحالات الطبيعة / الخطة		٠,٢ $ط_1$	٠,٥ $ط_2$	٠,٣ $ط_3$
الخطط	$أ_1$	٢٠	٢٠	٢٠
	$أ_2$	١٥	٣٠	٣٠
	$أ_3$	١٠	٢٥	٤٠

والقيم المتوقعة للخطط الثلاث ستكون كما يلي :

ق٠م للخطة ($أ_1$) = ٠,٢×٢٠ + ٠,٥×٢٠ + ٠,٣×٢٠ = **٢٠**

ق٠م للخطة ($أ_2$) = ٠,٢×١٥ + ٠,٥×٣٠ + ٠,٣×٣٠ = **٢٧**

ق٠م للخطة ($أ_3$) = ٠,٢×١٠ + ٠,٥×٢٥ + ٠,٣×٤٠ = **٢٦,٥**

وسنجد أن أكبر قيمة متوقعة هي ٢٧ وهي تصاحب الخطة الثانية ، وعلى ذلك يكون القرار المناسب هو تنفيذ الخطة $أ_2$ وهو شراء ١٥ نسخة.

تمارين على نظرية اتخاذ القرارات

(١) إذا كان توزيع الطلب لمنتج معين لليوم التالي لشركة النصر يمثله التوزيع التالي :

الطلب	١٤	١٥	١٦
الإحتمال	٠,٢	٠,٥	٠,٣

فإذا كان ربح القطعة المنتجة هو ٥ جنيهات وسعر بيعها ٩ جنيهات ، والمنتجات التي لا تُباع في اليوم التالي تصبح لا قيمة لها. فالمطلوب :

١. إحسب المبيعات المتوقعة لهذا اليوم؟ :

٢. ما هو القرار الأمثل للكمية الواجب الإحتفاظ بها؟ :

(٢) إذا كان لدينا المصفوفة الرياضية التالية :

الخطط		ط١	ط٢	ط٣
	أ١	-٤	١٤	١٣
	أ٢	٦	٠	٥
	أ٣	٥	٤	٣

فما هو القرار الواجب اتخاذه في الحلات التالية :

١- طريقة التفاؤل التام

٢- طريقة التشاؤم

٣- طريقة التفاؤل بافتراض معامل التفاؤل ٠,٧.

٤- إذا كانت الإحتمالات الخاصة بحالات الطبيعة على الترتيب هي : ٠,٧ ، ٠,٢ ، ٠,١

٥- طريقة الأسف.

٦- طريقة تساوي الإحتمالات.

(٣) أحد دور الصحف ترغب فى معرفة عدد المجلات المناسب طبعها في أسبوع ، ومن الخبرة السابقة وعلى أساس تحليل إحصائيات المبيعات تبين أن التوزيع الإحتمالي لمبيعات المجلة كان كما يلي :

عدد المجلات لأقرب ألف	١٠	١١	١٢	١٣
الإحتمال	٠,١	٠,٢	٠,٤	٠,٣

وبفرض أن سعر بيع العدد من المجلة ٥ جنيه وأن تكلفة العدد ٣ جنيهات ، وأن الإعداد التي لا تُباع خلال الأسبوع تصبح لا قيمة لها. المطلوب :

١. إحسب المبيعات المتوقعة لهذا الأسبوع؟ :
٢. ما هو القرار الأمثل للكمية الواجب الإحتفاظ بها؟ :

(٤) منتج أمامه أن ينتج ٣ أنواع من المنتجات أ١ ، أ٢ ، أ٣ ، ٣ حالات طبيعة الرواج ط١ ، والإستقرار ط٢ ، والكساد ط٣ ، وقدر هذا المنتج أن المصفوفة التي تمثل أرباحه وخسائره بآلاف الجنيهات على النحو التالي :

الخطة \ حالات الطبيعة		ط١	ط٢	ط٣
الخطط	أ١	٣٠	١٠	-٤
	أ٢	٢٠	٩	-٢
	أ٣	١٥	٧	١

ولكي يقرر المنتج أي الأنواع يحقق إنتاجها أكبر ربح ممكن يكون لديه ٤ مقاييس .

المطلوب : ما هى المقاييس التي يستخدمها لتحديد أكبر ربح ممكن؟.

(٥) إذا توافرت لديك البيانات الجدولية التالية :

جدول تكلفة :

البدائل \ ط	ط١	ط٢	ط٣
أ١	٦	٨	٠
أ٢	٣	٢	٥
أ٣	٤	٦	٢
أ٤	٧	١-	٤

جدول ربح :

البدائل \ ط	ط١	ط٢	ط-	ط٣
ث١	٣	٠	٦	٤
ث٢	٨	٣	٢-	١
ث٣	١	٥	٢	١-

المطلوب :

١- أوجد القرار المناسب لكل جدول في حالة التفاؤل ثم في حالة التشاؤم

٢- أوجد القرار المناسب بافتراض معامل التفاؤل ٠,٣

٣- أوجد القرار المناسب الذي يُؤخذ بمقياس الأسف.

٤- أوجد القرار المناسب الذي يُؤخذ بمقياس تساوي الإحتمالات.

(٦) أراد مدير الشركة المصرية تقدير كمية المشتريات من سلعة معينة بحيث يحقق له هذا الإختيار أقصى الأرباح ، فإذا كانت الإستراتيجيات المرغوب الإختيار من بينها هي شراء ٣٠ ، ٣٤ ، ٣٨ ، ٤٢ وحدة ، وكانت مستويات الطلب المتوقعة هي ٣٢ ، ٣٤ ، ٤٠ ، ٤٨ وحدة فإذا علمت أن سعر الوحدة

الواحدة من السلعة في السوق هي ٩ جنيهات وتكلفة شراؤها ٧ جنيهات والسلعة التي لا تباع تفقد قيمتها . والمطلوب :

معرفة أفضل الإستراتيجيات وفقاً للمعايير الخمسة لنموذج عدم التأكد (مقابل التفاؤل ٠,٩) ؟.

(٧) شركة ترغب في اختيار استراتيجية الشراء التى تحقق بها أقصى الأرباح فإذا كانت الإستراتيجيات المتاحة هي شراء ١٢ ، ١٨ ، ٢٠ ، ٢٦ وحدة ، وكانت مستويات الطلب المتوقعة هي ١٥ ، ١٩ ، ٢٢ ، ٢٨ وحدة ، وكان سعر الوحدة الواحدة يساوي ٥ جنيهات وتكلفة شراؤها ٤ جنيهات والوحدات التي لا تباع تُقدر قيمة كل وحدة بجنيهين والمطلوب :

معرفة أفضل الإستراتيجيات وفقاً للمعايير الخمسة لنموذج عدم التأكد (مقابل التفاؤل ٠,٧) ؟.

الفصل الخامس

نظرية المباريات

The Games Theory

تناقش هذه النظريه كيفية تحليل المواقف المتعارضه ، فلكل منشأه تجاريه أهداف خاصه تسعى إلى تحقيقها ، وفى سبيل ذلك فإنها تضع الخطط والإستراتيجيات الخاصه التى تكفل لها تحقيق هذه الأهداف ، وفى الجانب الآخر نجد أن هناك منشأه أخرى منافسه لها ، ولها أهدافها ومصالحها التى قد تتعارض مع أهداف ومصالح المنشأه الأولى ، فعائد أى خطه لأي منشأه لايعتمد على هذه الخطه فقط ، ولكنه يعتمد على تفاعل هذه الخطه مع تحركات وخطط المنشأه المنافسه ، وعلى ذلك فإنه يتعين على كل منشأه أن تختار الخطه المناسبه فى ضوء التحركات غير المعلومه بدقه من جانب المنشأه المنافسه .

إن موقف المواجهة بين المتنافسين يمكن تصويره على النحو التالي :

بفرض أن الشركة (أ) لديها عدة استراتيجيات (بدائل) يترتب على كل استراتيجية عائد ما ، وهذا العائد في الوقت نفسه يمثل خسائر سوف تحدث بالنسبة للشركة المنافسة الأخرى ، كذلك فإن الشركة المنافسة سوف تحاول تقليل الخسائر (تقليل العائد للشركة (أ)) وذلك باتباع استرتيجيات مضادة لإستراتيجيات الشركة (أ) ، وفي مثل هذه الحالة فإن القرار المناسب للشركة (أ) يعتمد على استراتيجيات الشركة المنافسة، ولذلك ، فإنه يمكن التعبير عن هذه النظريه على أنها مباراه بين طرفين ، مكسب أحدهما يكون خساره للطرف الآخر ، وهذا النوع من المباريات يُسمى مباراه بين شخصين والنتيجه (صفر) .

ويتفرع من هذا النوع من المباريات نوعان من الإختيار الإستراتيجى :

(١) إستراتيجيه مطلقه (صافيه) ، وهى التى تتكون من تحرك واحد معين

(٢) إستراتيجيه مختلطه : تتكون من عدد من التحركات تُستخدم بنسبه ثابته

الإستراتيجيه المطلقه :

وهى مباريات ثنائيه يتعين على كل متنافس فيها إختيار استراتيجيه واحده فقط ، وهى الإستراتيجيه التى يحدث عندها توازن بين العائد الذى يتحقق للاعـب (أ) وبين الخسائر التى تتحقق للطرف الآخر ، فهى بالنسبه للاعب (أ) تحقق أقصى القيم الدنيا للعائدات المتوقعه ، وهى بالنسبه للطرف الآخر سوف تحقق أدنى القيم القصوى للخسائر المتوقعه .

وحيث أن المباراه نتيجتها صفر ، (أي أن المجموع الجبرى للمكاسب والخسـائر = صفر) ، فإنه يمـكن التعبير عن المباراه بين اثنين من اللاعبين (وليكن اللاعب " أ " واللاعب " ب ") فى مصفوفه تسمى مصفوفة المباراه ، حيث تمثل المصفوفه الإستراتيجيات (الخطط) المتاحه للاعب (أ) ، كما تمثل الأعمده الإستراتيجيات (الخطط) المتاحه للاعب (ب) ، وتمثل مكونات المصفوفه عادةً المدفوعات المقابله لكل خطه من خطط (أ) مع الخطه المقابله من خطط (ب) .

ويمكن عرض مصفوفة اللعبه على الصوره التاليه : -

اللاعب (ب)

		ص١	ص٢	. ... ..	صو
اللاعب (أ)	س١	أ١١	أ٢١		أ١و
	س٢	أ١٢	أ٢٢		أ٢و
	س٣	أ١٣	أ٢٣		أ٣و
	.				
	.				
	.				
	سن	أن١	أن٢		أن و

حيث تمثل :

$س_1$ ، $س_2$ ، ...... $س_ن$ الخطط المختلفه للاعب (أ)

$ص_1$ ، $ص_2$ ، ...... $ص_ن$ الخطط المختلفه للاعب (ب)

وعلى كل لاعب إختيار خطه واحده من بين الخطط والتحركات البديله المتاحه له ، فكل لاعب يحاول إختيار الخطه المناسبه له بحيطه وحذر فاللاعب (أ) يبحث فى كل خطه متاحه له عن العائد الأقل ، وبعد ذلك يختار أكبر عائد من بين هذه الأقليات ، أي أن اللاعب (أ) يحكمه أسلوب (أكبر الأقل)

بينما يحاول اللاعب (ب) تجنب أكبر خساره ممكنه له ، ولهذا يبحث عن أكثر خساره يمكن أن تحققها كل خطه من الخطط ، ويختار أقل قيمه من هذه الخساره ، أي أن اللاعب (ب) يحكمه أسلوب (أقل الأكبر)

مثال (١)

تتنافس شركة طارق الكبرى مع شركة خالد للتجاره على الحصول على عقد توريد إحدى الطلبيات لإحدى الجهات ، وتعتمد شركة طارق الكبرى فى الحصول على هذا العقد إما على تقديم منتجات مجانيه أو تخفيض سعر منتجاتها ، بينما ترى شركة خالد للتجاره إتباع إحدى الخططتين التاليتين :

(١) تغليف منتجاتها تغليفاً فاخراً جداً .

(٢) تكثيف حمله إعلانيه مؤثره فى التعاقد .

وكانت مصفوفة اللعبه من وجهة نظر شركة طارق الكبرى فى الصوره التاليه :

		شركة خالد للتجاره	
		تغليف المنتجات تغليفاً فاخراً $ص_1$	حمله إعلانيه مكثفه $ص_2$
شركة طارق الكبرى	تقديم منتجات مجانيه ($س_1$)	٥٠	٦٠
	تخفيض سعر منتجات ($س_2$)	-٦٠	٧٠

فما هى الخطه المناسبه لكل شركه ، وماهى قيمة اللعبه ؟.

الحـــل :

إذا اتبعت شركة طارق الكبرى الخطه $س_1$ ، فإنها تحقق مكسب قدره ٥٠ جنيه ، وذلك إذا ماتبعت شركة خالد الخطه $ص_1$ ، فى حين أنه سوف تحقق مكسباً قدره ٦٠ جنيه وذلك إذا ماتبعت شركة خالد الخطه $ص_2$.

أما إذا اتبعت شركة طارق الكبرى الخطه $س_2$ واتبعت شركة خالد الخطه $ص_1$ ، فإن شركة طارق ستحقق خساره قدرها ٦٠ جنيه ، وتحصل شركة خالد على مكسب قدره ٦٠ جنيه ، وإذا ماتبعت شركة طارق الخطه $س_2$ واتبعت شركة خالد الخطه $ص_2$ ، فإن شركة طارق ستحقق مكسب قدره ٧٠ جنيه .

ومن التفصيل السابق نستطيع أن نوضح أنه ليس بمقدور طرف واحد التحكم فى نتيجة اللعبه ، حيث أن عائد اللعبه يرجع إلى تفاعل الخطه التى يختارها كل طرف من الأطراف فى نفس الوقت .

وبتطبيق أسلوب أكبر الأقل للمكسب وأقل الأكبر للخساره ، أو أكبر الأقل للصفوف وأقل الأكبر للأعمده :

فإنه بالنسبه للصفوف نجد أن :

☒ أقل قيمه فى الصف الأول = ٥٠

☒ أقل قيمه فى الصف الثانى = - ٦٠

أي أن : أكبر الأقل = ٥٠

وبالنسبه للأعمده ، نجد أن :

☒ أكبر قيمه فى العمود الأول = ٥٠

☒ أكبر قيمه فى العمود الثانى = ٧٠

أي أن : أقل الأكبر = ٥٠

وعلى ذلك ، فإن (٥٠) تمثل نقطة الحل المشترك للعبه * ، حيث أن ٥٠ هى أقل قيمه فى الصف الذى توجد به ، وفى نفس الوقت فى العمود الأول . وعلى ذلك فإن (٥٠) تمثل قيمة اللعبه ، وهى تمثل المكسب الذى سوف تحصل عليه شركة طارق ، والخساره التى سوف تتحملها شركة خالد .

ويمكن الحل مباشرةً ودون تفصيل على النحو التالى :

شركة خالد

شركة طارق		ص١	ص٢	
	(س١)	٥٠	٦٠	(٥٠) أكبر الأقل
	(س٢)	-٦٠	٧٠	- ٦٠
		(٥٠)	٧٠	

= أقل الأكبر

وعلى ذلك توجد نقطه للحل المشترك وهى (٥٠) وتمثل قيمة اللعبه ويجب على شركة طارق إختيار الخطه (س١) لأنها تحقق أفضل مكسب فى مواجهة الشركه المنافسه . كما يجب على شركة خالد إختيار الخطه (ص١) ، حيث أنها تحقق أقل خساره فى مواجهة الشركه المنافسه .

مثال (٢)

بفرض أن مصفوفة اللعبه بالنسبه إلى اللاعب (أ) كانت فى الصوره التاليه :

اللاعب (ب)

الخطه	١	٢	٣	٤
١	٩	٥	١٠	٦,٥
٢	٧	٦	٨	٧,٥
٣	٨	٤,٥	٧	٨,٥

اللاعب (أ)

فما هى أفضل خطه لكل لاعب ، وما هى قيمة اللعبه ؟٠

الحــل :ـ

اللاعـــب (ب)

الخطه	١	٢	٣	٤	
١	٩	٥	١٠	٦,٥	٥
٢	٧	٦	٨	٧,٥	(٦) أكبر الأقل
٣	٨	٤,٥	٧	٨,٥	٤,٥
	٩	(٦)	١٠	٨,٥	

اللاعب (أ)

أقل الأكبر

وعلى ذلك :

توجد نقطه للحل المشترك وهى (٦) ، وتُسمى نقطة التلاقي أو نقطة التوازن ، وتمثل قيمة اللعبه وسوف يحصل عليها (أ) ٠

وبذلك نجد أنه :

- يجب على (أ) إختيار الخطه الثانيه ٠
- يجب على (ب) إختيار الخطه الثانيه ٠

الإستراتيجيات المختلطه :

فى حالة ما إذا كانت المباراه ليست لها نقطة توازن أو نقطة تلاقي (أي حل مشترك) ويظل أمام كل لاعب أكثر من خطه ليختار بينهم دون أن يستطيع الوصول إلى قرار نهائى باختيار خطه واحده بصفه نهائيه ، حيث لاتوجد خطه وحيده مثلى تحقق له أفضل عائد ، ففى هذه الحاله يقوم كل لاعب بخلط خططه المختلفه بحيث يختار إحدى الخطط ثم يغيرها باختيار آخر ثم يعود إلى إختيار خطه أخرى ، وهكذا ٠

وهنا يجب وضع مقاييس معينه ثابته ، أو مايُطلق عليها إحتمالات ثابته لإختيار كل خطه من الخطط بحيث يكون العائد المتوقع أو الخساره المتوقعه ثابته بالنسبه لجميع الخطط ٠

وقبل تطبيق الإستراتيجيات المختلطه يجب تطبيق قوانين أو قواعد السيطره على أساس تخفيض عدد الأعمده وعدد الصفوف بحيث يكون هناك صفين فقط وعمودين فقط ، ويمكن تلخيص قوانين السيطره كما يلي :

(١) إذا كانت جميع عناصر أحد الصفوف متساويه أو تزيد عن المفردات المناظره لها فى صف آخر ، فإنه يمكن إستبعاد الصف الآخر عن المصفوفه دون أن يؤثر ذلك على نتيجة المباراه ، ويُسمى الصف الأول بالصف المسيطر والصف الآخر بالصف المُستبعد ، وذلك لأنه من الطبيعى أن اللاعب (أ) يلعب بهدف الربح ، فإذا ما زادت فرص الربح فى جميع عناصر أحد الصـــفوف عن صف آخر ، فإن اللاعب (أ) من الطبيعى أنه سوف لايلعب إلا على الصف الذى يحقق ربحاً أكبر ٠

(٢) إذا كانت جميع عناصر أحد الأعمده متساويه أو تقل عن المفردات المناظره لها فى عمود آخر ، فإنه يمكن إستبعاد العمود الآخر عن المصفوفه دون أن يؤثر ذلك على نتيجة المباراه ، ويُسمى العمود الأول بالعمود المسيطر والعمود الآخر بالعمود المُستبعد ، لأنه من الطبيعى أن اللاعب (ب) يلعب بهدف تخفيض الخسائر ، فإذا ما نقصت فرص الخسائر أو قيمتها فى عمود عن عمود آخر ، فإن اللاعب (ب) سيركز فى اللعب فى حدود العمود ذات أقل خساره ويستبعد العمود الآخر ذو الخسائر الأكبر ٠

وخلاصة القول ، تُستبعد الصفوف الأقل من الصفوف الأخرى ، وتُستبعد الأعمده الأكبرمن الأعمده الأخرى ٠

مثال (٣)

المطلوب تطبيق قوانين السيطره على مصفوفة المباراه التاليه :

اللاعب (ب)

اللاعب (أ)		ص١	ص٢	ص٣	ص٤	ص٥
	س١	٩	٣	١	٨	٠
	س٢	٦	٥	٤	٦	٧
	س٣	٢	٤	٣	٥	٨
	س٤	٥	٦	١	١,٥	١

الحـــل :

فى المصفوفه الكبيره السابقه نلاحظ أن العمود (ص٣) يحتوى على مفردات مســاويه أو أقل من جميع المفردات المناظره لها فى العمود (ص٢) (ص٤) ، وبذلك يمكن إستبعادهما من المصفوفه ، وتُختصر المصفوفه على النحو التالى :

	ص١	ص٢	ص٣
س١	٩	١	٠
س٢	٦	٤	٧
س٣	٢	٣	٨
س٤	٥	١	١

وكذلك فى المصفوفه الجديده نجد أن جميع مفردات الصف (س٢) تساوى أو تزيد عن جميع المفردات المناظره لها فى الصف (س٤) ، وعلى ذلك يمكن إستبعاد الصف (س٤) واختصار المصفوفه على النحو التالى :

	ص١	ص٢	ص٣
س١	٩	١	٠
س٢	٦	٤	٧
س٣	٢	٣	٨

وبذلك يمكن حل المباراه بطريقه أسهل لأن الحل المشترك للإستراتيجيه المطلقه سيكون (٤) ، ولقد سبق القول أنه إذا كانت نتيجة المباراه ليس لها حل مشترك ، فإننا نتبع الإستراتيجيات المختلطه بعد تطبيق قوانين السيطره الكامله وجعل المصفوفه من الرتبه (٢ × ٢) .

والمثال التالى يوضح كيفية حل الإستراتيجيات المختلطه : -

	(ب)	
(أ)	١٤	١٥
	١٧	١٣

إن المباراه السابقه لا تتضمن حلاً مشتركاً ، ولذلك فإنه من الأفضل بالنسبه لكل منافس إستخدام إستراتيجيه مختلطه ، فالمتنافس أ يختار الصف الأول بعض الوقت ، ويختار الصف الثانى بعض الوقت ، وتكون المشكله توزيع وقت المتنافس أ بين الصفوف وتوزيع وقت المتنافس ب بين الأعمده المختلفه .

استخدام الطريقه الحسابيه فى تحديد أفضل الإستراتيجيات : -

يمكن استخدام الطريقه الحسابيه فى تحديد أفضل الإستراتيجيات بالنسبه للمباريات التى تتكون من ٢ × ٢ ، وهى المباريات التى يكون لكل من المتنافسين إختيارين اثنين .

وسوف نشرح الطريقه الحسابيه على المثال السابق الذى سبق لنا ذكره والذى يتخذ الشكل التالى :

(ب)

$$(أ)\quad \begin{bmatrix} ١٤ & ١٥ \\ ١٧ & ١٣ \end{bmatrix}$$

وتتضمن الطريقه الحسابيه الخطوات التاليه :

(١) يتم طرح أصغر قيمه فى كل صف من القيمه الأكبر ، كما يتم طرح أصغر قيمه فى كل عمود من القيمه الأكبر ، وبذلك تكون المصفوفه في الشكل التالى :

(ب)

$$\begin{array}{cc} ٣ & ٢ \end{array}$$

$$(أ)\quad \begin{array}{c} ١ \\ ٤ \end{array} \begin{bmatrix} ١٤ & ١٥ \\ ١٧ & ١٣ \end{bmatrix}$$

(٢) يتم تبادل الأرقام التى نتجت من عملية الطرح :

(ب)

$$\begin{array}{cc} ٢ & ٣ \end{array}$$

$$(أ)\quad \begin{array}{c} ٤ \\ ١ \end{array} \begin{bmatrix} ١٤ & ١٥ \\ ١٧ & ١٣ \end{bmatrix}$$

(٣) لإيجاد استراتيجيات المتنافس (أ) يتم جمع (٤ ، ١) على أن يتم قسمة كل رقم منهما على المجموع ، وبنفس الطريقه يتم إيجاد إستراتيجيات المتنافس (ب) عن طريق جمع (٢ ، ٣) على أن يتم قسمة كل رقم منهما على المجموع ۰ وبذلك تكون المصفوفه بعد تنفيذ ما تقدم كما يلى :

(ب)

		$\frac{٢}{٥}$	$\frac{٣}{٥}$
(أ)	$\frac{٤}{٥}$	١٤	١٥
	$\frac{١}{٥}$	١٧	١٣

وبذلك تكون إستراتيجيات " أ " $\frac{٤}{٥}$ ، $\frac{١}{٥}$ وتكون إستراتيجيات " ب " $\frac{٢}{٥}$ ، $\frac{٣}{٥}$ ، وهذه النتائج تطابق ما سبق أن توصلنا إليه ، ونعيب على الطريقه الحسابيه أنها صالحه فقط للمباريات التى تتكون من (٢ × ٢) ، ولايمكن تطبيقها على المباريات إذا زاد عدد إختيارات كل من اللاعبين عن إختيارين ۰

أما قيمة المباراة فستكون كالآتي :

$$١٤ \times \frac{٤}{٥} \times \frac{٢}{٥} = \frac{١١٢}{٢٥}$$

$$١٥ \times \frac{٤}{٥} \times \frac{٣}{٥} = \frac{١٨٠}{٢٥}$$

$$١٧ \times \frac{١}{٥} \times \frac{٢}{٥} = \frac{٣٤}{٢٥}$$

$$١٣ \times \frac{١}{٥} \times \frac{٣}{٥} = \frac{٣٩}{٢٥}$$

$$= \frac{٣٦٥}{٢٥} = ١٤,٦$$

إستخدام طريقة المباريات الفرعيه في حالة مصفوفة التي تزيد عن ٢×٢

استخدمنا قوانين السيطره لتخفيض مصفوفة نتائج المباراه إلى ٢×٢ ولكن فى بعض الأحيان نجد أنه لايمكننا تخفيض مصفوفة نتائج المباراه إلى ٢ × ٢ باستخدام قوانين السيطره ، ولهذا نلجأ إلى طريقة المباريات الفرعيه والمثال التالى يوضح هذه الطريقه .

مثال (٤)

حدد أفضل الإستراتيجيات وقيمة المباراه التاليه :

(ب)

(أ)			
	-١٠	٢	-٢
	٨	صفر	٤
	-١٠	٤	صفر

الحـــل :

يُستبعد الصف الأول نظراً لسيطرة الصف الثالث عليه ، وبذلك تصبح المصفوفه :

(ب)

(أ)			
	٨	صفر	٤
	-١٠	٤	صفر

ويُلاحظ هنا أنه لا يمكن إختصار حجم المصفوفه لأكثر من ذلك نتيجة عدم انطباق قوانين السيطره بعد ذلك ، ومن هنا يتم الحل بتجزئة المصفوفه المذكوره إلى عدد من المباريات الفرعيه بحيث تصبح كل مباراه فرعيه ٢×٢ وعلى ذلك فإن المباريات الفرعيه تكون على النحو التالى :

المصفوفة الفرعية الأولى :

	(ب)	
(أ)	٨	صفر
	-١٠	٤

المصفوفة الفرعية الثانية :

	(ب)	
(أ)	صفر	٤
	٤	صفر

المصفوفة الفرعية الثالثة :

	(ب)	
(أ)	٨	٤
	-١٠	صفر

ويتم حل كل مصفوفه فرعيه باستخدام الطرق السابق شرحها للمباراه التى تتكون من (٢ × ٢) ، سواء الطريقه التحليليه أو الحسابيه ٠

فإذا استخدمنا الطريقه الحسابيه ، نجد أن الإستراتيجيات المثلى وقيمة المباراه الفرعيه تكون على النحو التالى :

<u>المباراه الفرعيه الأولى :</u>

	١٨	٤
	٨	صفر
	-١٠	٤

	١٨	٤	
	٨	صفر	١٤
	-١٠	٤	٨

	$\frac{١٨}{٢٢}$	$\frac{٤}{٢٢}$	
	٨	صفر	$\frac{١٤}{٢٢}$
	-١٠	٤	$\frac{٨}{٢٢}$

قيمة المباراة = $\left(٨ \times \frac{١٤}{٢٢} \times \frac{٤}{٢٢} \right) - \left(-١٠ \times \frac{٨}{٢٢} \times \frac{٤}{٢٢} \right)$

$+ \left(\text{صفر} \times \frac{٨}{٢٢} \times \frac{١٨}{٢٢} \right) - \left(٤ \times \frac{٨}{٢٢} \times \frac{١٨}{٢٢} \right)$

$= \frac{٤٤٨}{٤٨٤} - \frac{٣٢٠}{٤٨٤} + \text{صفر} \div \frac{٥٧٦}{٤٨٤}$

قيمة المباراه = ٠,٩٣ − ٠,٦٦ + صفر ÷ ١,١٩ = ١,٤٦

المباراه الفرعيه الثانية :

$$\begin{array}{cccccccccc} \frac{١}{٢} & & & & ٤ & ٤ & & & ٤ & ٤ \\ \frac{١}{٢} & ٤ & \text{صفر} &] & ٤ & ٤ & \text{صفر} &] \; ٤ & ٤ & \text{صفر} \\ \frac{١}{٢} & \text{صفر} & ٤ &] & ٤ & \text{صفر} & ٤ &] \; ٤ & \text{صفر} & ٤ \end{array}$$

قيمة المباراة = $\left(\text{صفر} \times \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢} \right) + \left(٤ \times \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢} \right)$

$+ \left(٤ \times \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢} \right) - \left(\text{صفر} \times \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢} \right)$

= صفر + ١ + ١ + صفر = ٢

المباراه الفرعيه الثالثة :

(ب)

$$(\text{أ}) \quad \begin{bmatrix} ٤ & ٨ \\ \text{صفر} & -١٠ \end{bmatrix}$$

توجد نقطة تلاقى ممثله فى الرقم (٤) ، حيث أنه أصغر قيمه فى الصف الأول وأكبرقيمه فى العمود الثانى ، وبذلك يكون حل المباراه الفرعيه الثالثه ممثلاً فى الصف الأول والعمود الثانى ، وقيمة المباراه = ٤

وباستعراض نتائج المباريات الفرعيه الثلاث نجد أن المباراه الفرعيه الأولى صاحبة أصغر قيمه ، ولذلك فإنها تمثل الحل الأمثل للمباراه كلها والذى يتخذ الشكل التالى :

المتنافس (أ) : صفر ، $\frac{٧}{١١}$ ، $\frac{٤}{١١}$ ، وذلك بالنسبه للصفوف الثلاثه على الترتيب

المتنافس (ب) : $\frac{٢}{١١}$ ، $\frac{٩}{١١}$ ، صفر ، وذلك بالنسبه للأعمده الثلاثه على الترتيب

وقيمة المباراه = ١,٤٦

مثال (٥)

إذا كانت مصفوفة نتائج المباراة الصفرية بين س ، ص كما يلي :

(ص)

(س)	٦	٢	٨
	٤	صفر	١٠
	٤	٧	٩

والمطلوب إيجاد الاستراتيجية المثلى وقيمة المباراة؟.

الحـــل :

بفحص المصفوفة السابقة يتضح أنه لا توجد نقطة تلاقي ، وحيث أن أصغر أكبر قيمة في الأعمدة هى ٦ ، في حين أن أكبر أصغر قيمة في الصفوف هي ٤ ، هذا ويمكن استخدام قوانين السيطرة لتصغير المصفوفة السابقة لتصبح (٢×٢) أي صفين وعمودين على النحو التالي :

☒ بحذف العمود الثالث لسيطرة العمود الثاني عليه ، ثم بحذف الصف الثاني نظراً لسيطرة الصف الثالث عليه ، وبذلك تصبح المصفوفه :

(ص)

(س) $\begin{bmatrix} ٦ & ٢ \\ ٤ & ٧ \end{bmatrix}$

☒ وحيث لا توجد نقطة تلاقى . إذ أن لا توجد استراتيجية مطلقة بل استراتيجية مختلطة ، ويمكن ايجاد نسب أو احتمال نتائج كل استراتيجية بالنسبة لكل متنافس وحساب قيمة المباراة على النحو التالي :

١- حساب الفروق بين مفردات كل صف وكل عمود :

	(ص)		فروق الصفوف
(س)	٦	٢	٤
	٤	٧	٣
فروق الأعمدة	٢	٥	

٢- تبادل مواقع الفروق السابق حسابها :

	(ص)		فروق الصفوف
(س)	٦	٢	٣
	٤	٧	٤
فروق الأعمدة	٥	٢	

٣- إيجاد نسب استخدام كل استراتيجية :

	(ص)		
(س)	٦	٢	$\frac{٣}{٧}$
	٤	٧	$\frac{٤}{٧}$
	$\frac{٥}{٧}$	$\frac{٢}{٧}$	

ويمكن إيجاد قيمة المباراة كالآتي :

$$\text{قيمة المباراة} = ٦ \times \frac{٣}{٧} \times \frac{٥}{٧} = \frac{٩}{٤٩}$$

$$٢ \times \frac{٣}{٧} \times \frac{٢}{٧} = \frac{١٢}{٤٩}$$

$$٤ \times \frac{٤}{٧} \times \frac{٥}{٧} = \frac{٨٠}{٤٩}$$

$$٧ \times \frac{٤}{٧} \times \frac{٢}{٧} = \frac{٥٦}{٤٩}$$

$$= \frac{٢٣٨}{٤٩} = ٤,٨٥٧$$

ويلاحظ أن :

☒ الأرباح المتوقعة للمتنافس (س) تعادل الخسائر المتوقعة للمتنافس (ص)

☒ المتنافس (س) يستخدم الاستراتيجية الأولى $\frac{٣}{٧}$ من الوقت والاستراتيجية الثالثة $\frac{٤}{٧}$ من الوقت

☒ أما المتنافس (ص) يستخدم الاستراتيجية الأولى $\frac{٥}{٧}$ من الوقت والاستراتيجية الثانية $\frac{٢}{٧}$ من الوقت

مثال (٦)

إذا كانت مصفوفة نتائج المباراة بين س ، ص كما يلي :

(ص)

$$(\text{س}) \quad \begin{pmatrix} -٦ & -٤ & ٥ & ٢ & ١ \\ ١٠ & ٩ & ١٢ & ٩ & \text{صفر} \\ ٢ & ٨ & ٦ & ٥ & ٤ \end{pmatrix}$$

والمطلوب إيجاد الاسترتيججية المثلى وقيمة المباراة؟٠

الحــل :

باستخدام قوانين السيطرة نجد أن الصف الثالث مسيطر على الصف الأول فسيتم استبعاده ، وأن العمود الثاني مسيطر على العمود الثالث والعمود الرابع وعلى ذلك :

صفر	٩	١٠
٤	٥	٢

وبالتالي نجد أن المصفوفة الناتجة بعد تطبيق قواعد السيطرة ستكون (٢×٣) ولحل المصفوفة السابقة يتم تقسيمها إلى عدد معين من المباريات الفرعية ، كل منها تكون (٢×٢) على النحو التالي :

المباراه الفرعيه الأولى :

صفر	٩
٤	٥

المباراه الفرعيه الثانية :

صفر	١٠
٤	٢

المباراه الفرعيه الثالثة :

٩	١٠
٥	٢

وبحل المباراة الفرعية الأولى :

	(ص)		الأقل
(س)	صفر	٩	صفر
	٤	٥	٤
الأكبر	٤	٩	

أكبر الأقل (٤) وأقل الأكبر (٤) ، وعلى ذلك توجد نقطة تلاقي

∴ قيمة المباراة = ٤

وبحل المباراة الفرعية الثانية :

نجد أنه لا توجد نقطة تلاقى وسنقوم بحلها بالطريقة الحسابية :

(ص)

(س)			
	صفر	١٠	١٠
	٤	٢	٢
	٤	٨	

(ص)

(س)			
	صفر	١٠	٢
	٤	٢	١٠
	٨	٤	

(ص)

(س)			
	صفر	١٠	$\frac{٢}{١٢}$
	٤	٢	$\frac{١٠}{١٢}$
	$\frac{٨}{١٢}$	$\frac{٤}{١٢}$	

قيمة المباراة = صفر × $\frac{٢}{١٢}$ × $\frac{٨}{١٢}$ = صفر

١٠ × $\frac{٢}{١٢}$ × $\frac{٤}{١٢}$ = $\frac{٨٠}{١٤٤}$

٤ × $\frac{١٠}{١٢}$ × $\frac{٨}{١٢}$ = $\frac{٣٢٠}{١٤٤}$

٢ × $\frac{١٠}{١٢}$ × $\frac{٤}{١٢}$ = $\frac{٨٠}{١٤٤}$

= $\frac{٤٨٠}{١٤٤}$ = ٣,٣٣

وبحل المباراة الفرعية الثالثة :

	(ص)		الأقل
(س)	٩	١٠	٩
	٥	٢	٢
الأكبر	٩	١٠	

أكبر الأقل (٩) وأقل الأكبر (٩) ، وعلى ذلك توجد نقطة تلاقي

∴ قيمة المباراة = ٩

وبتلخيص ما سبق نجد الآتي :

قيمة المباراة الفرعية الأولى = ٤

قيمة المباراة الفرعية الثانية = ٣,٣٣

قيمة المباراة الفرعية الثالثة = ٩

أقل قيمة من القيم الثلاثة = ٣,٣٣ ، أي تمثل قيمة المباراة الأصلية.

ومعنى ذلك أن :

☒ المتنافس (س) يستخدم الاستراتيجية الثانية $\frac{٢}{١٢}$ من الوقت والاستراتيجية الثالثة $\frac{١٠}{١٢}$ الوقت

☒ أما المتنافس (ص) يستخدم الاستراتيجية الأولى $\frac{٨}{١٢}$ من الوقت والاستراتيجية الخامسة $\frac{٤}{١٢}$ من الوقت

تمارين على نظرية المباريات

(١) حدد الإستراتيجيات المثلى وكذلك قيمة المباراة لمصفوفة المباراة التالية :

اللاعب (ب)

	−٣	صفر	−١	٣	٦
اللاعب(أ)	−١	٢	−٤	٢	٣

(٢) حدد الإستراتيجيات المثلى لكل من أ ، ب وكذلك قيمة المباراة لمصفوفة المباراة التالية :

(ب)

	١	−١	٣
	صفر	−٥	٣
(أ)	١	−٣	−٢
	−٢	٦	٤

(٣) حدد الإستراتيجيات المثلى وكذلك قيمة المباراة لمصفوفة المباراة التالية :

(ب)

	−٢	−٦
	−٤	−٣
(أ)	−٩	٢
	−١	−٧

(٤) حل المباراة التالية :

(ب)

	٢	٣	−١	٦	−٣	٥
(أ)	−٣	٤	−٤	٣	٢	٤

(٥) حل المباراة التالية :

(ب)

	٦	١٠
(أ)	١٢	٨

(٦) حدد الإستراتيجيات المثلى لكل من أ ، ب وكذلك قيمة المباراة لمصفوفات المباريات التالية :

أولاً :

(ب)

$$\begin{pmatrix} \text{١٥} & \text{٤} & \text{٣} & \text{٢} \\ \text{١٤} & \text{٨} & \text{١١} & \text{٩} \\ \text{٤} & \text{٦} & \text{١٣} & \text{٥} \end{pmatrix}$$

ثانياً :

(ب)

$$\begin{pmatrix} \text{٢} & \text{٥} & \text{٣} \\ \text{٨} & \text{٦} & \text{صفر} \\ \text{٣} & \text{١} & \text{٤} \end{pmatrix}$$

(٧) حدد الإستراتيجيات المثلى وكذلك قيمة المباراة لمصفوفات المباريات التالية :

أولاً :

(ب)

$$\begin{pmatrix} \text{٣} & \text{٥} & \text{-٢} \\ \text{٢} & \text{١} & \text{-٣} \\ \text{١} & \text{صفر} & \text{٤} \end{pmatrix} \quad \text{(أ)}$$

ثانياً :

(ب)

$$\begin{pmatrix} \text{٣} & \text{٨} & \text{١} \\ \text{٥} & \text{٤} & \text{٦} \\ \text{٢} & \text{١} & \text{صفر} \end{pmatrix} \quad \text{(أ)}$$

الفصل السادس

نماذج التخصيص

The Assignment Models

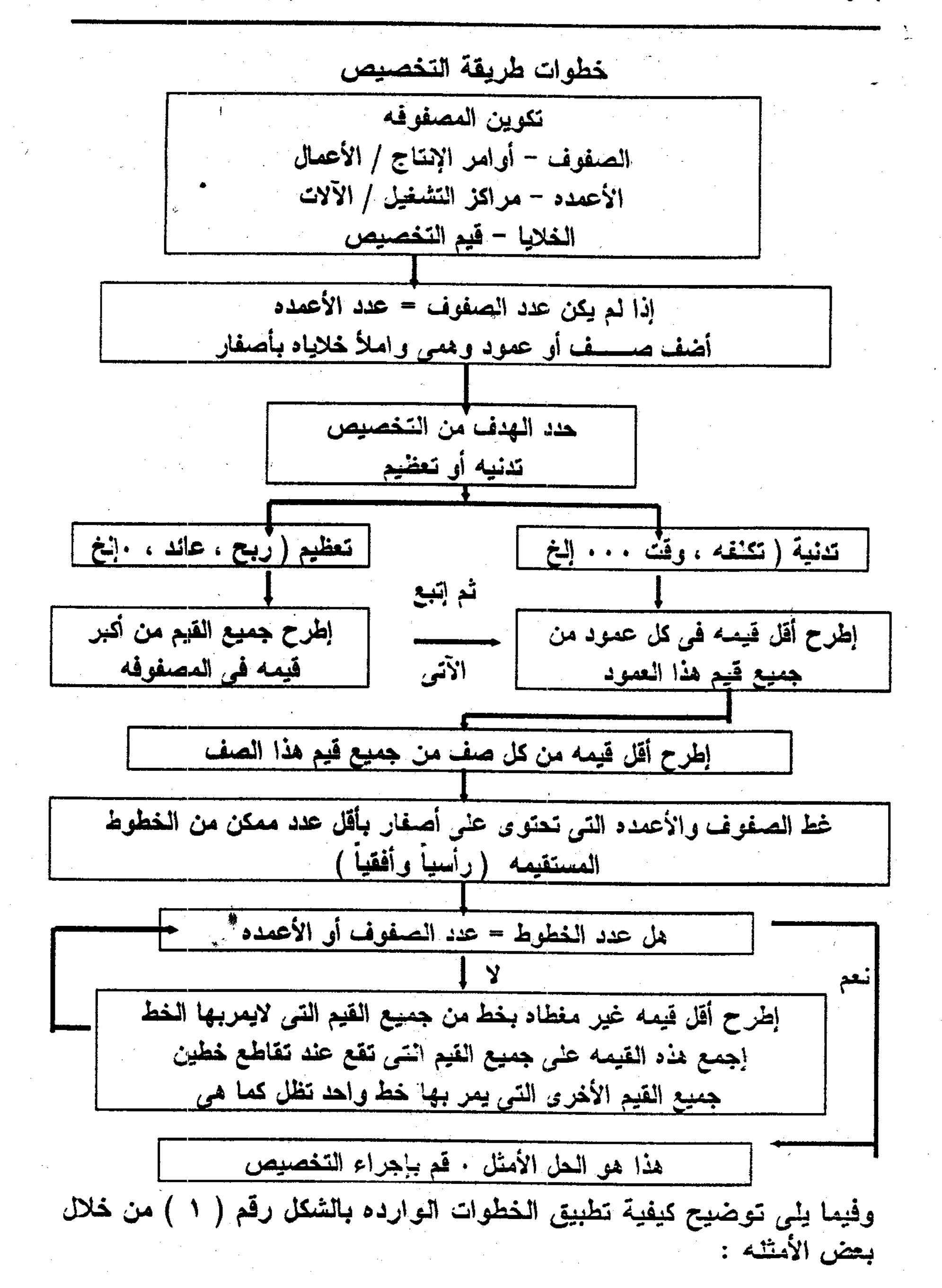
مقدمة

تمثل ظاهرة التخصيص أسلوب خاص من أساليب البرمجه الخطيه ، تُستخدم فى توزيع عدة أعمال أو مهام على عدد من المراكز الإنتاجيه البديله ، وذلك بهدف تحقيق أفضل من الأعمال ومراكز الإنتاج .

ويمكن تلخيص خطوات طريقة التخصيص فى الشكل الآتى♥ : -

♥ هذه الخطوات من تصميم الأستاذ الدكتور عبد العزيز جميل مخيمر ، أستاذ إدارة الأعمال بكلية التجارة - جامعة المنصورة .

خطوات طريقة التخصيص



وفيما يلى توضيح كيفية تطبيق الخطوات الوارده بالشكل رقم (١) من خلال بعض الأمثله :

مثال (١)

شركة مقاولات تعمل فى ثلاثة مشاريع لبناء مدارس فى كل من القرى [١] ، [٢] ، [٣] ، وفى كل موقع تحتاج الشركه إلى مهندس تنفيذ مقيم ٠

** أعلنت الشركه عن رغبتها فى تعيين مهندسين بمواصفات معينه ، فتقدم لها ثلاثه ممن تتوافر فيهم الشروط وهم [أ] ، [ب] ، [جـ] ، وكانت الأجور التى طلبوها لقبول العمل مبينه بالجدول التالى بالجنيه لكل يوم عمل :

المهندس / القريه	(١)	(٢)	(٣)
(أ)	٤٠	٥٤	٦٠
(ب)	٢٠	٣٦	٣٢
(جـ)	٢٨	٣٢	٢٤

فما هو أفضل تخصيص ممكن تقوم به الشركه بين المهندسين والمواقع لتحقيق إجمالى أجور أقل ما يمكن ؟ ٠

الحـل :

لأن الهدف هو تخفيض التكلفه إلى أقل حد ممكن ، فإن الخطوه الأولى تتمثـل فى طرح أقل قيمه فى كل عمود من قيم هذا العمود ، وعلى ذلك :

المهندس / القريه	(١)	(٢)	(٣)
(أ)	٢٠	٢٢	٣٦
(ب)	صفر	٤	٨
(جـ)	٨	صفر	صفر

** وتتمثل الخطوه الثانيه فى طرح أقل قيمه من كل صف من جميع قيم هـذا الصف ، ويُلاحظ أن الصفوف التى توجد بها أصفار تظل كما هى ، ويكون :

المهندس / القريه	(١)	(٢)	(٣)
(أ)	صفر	٢	١٦
(ب)	صفر	٤	٨
(جـ)	٨	صفر	صفر

فى الخطوه التاليه نقوم بتغطية الصفوف والأعمده التى تحتوى على أصفار بأقل عدد ممكن من الخطوط ، ويمكن رسم هذه الخطوط بأى طريقه بالشروط التاليه :

١- أن يكون عدد الخطوط أقل ما يمكن ٠

٢- أن يتم رسم هذه الخطوط أفقياً أو رأسياً ، ولايُسمح برسم أى خطوط تمر بقطر المصفوفه ٠

ويُرسم أقل عدد ممكن من الخطوط لتغطية الأعمده والصفوف التى تحوى أصفار ، ونختبر ما إذا كان عدد الخطوط يساوى عدد الصفوف أو عدد الأعمده ، فإذا كان يساويها فإنه يمكن الوصول إلى الحل الأمثل ٠ أما إذا كان لا يساويها يلزم الأمر تنفيذ الخطوات الموضحه فى الشكل رقم (١)

ومن مقارنة عدد الخطوط فى المصفوفه السابقه بعدد أعمدتها أو صفوفها نجد أن عدد الخطوط لايساوى عدد الصفوف أو عدد الأعمده وفى هذه الحاله تتم تنفيذ خطوه إضافيه تتمثل فى تحديد أقل قيمه غير مغطاه بخط وطرح هذه القيمه من جميع القيم غير المغطاه بخط ، ثم إضافتها إلى جميع القيم التى تقع عند تقاطع خطين ، وتظل جميع القيم الأخرى كما هى ٠

ففى المصفوفه السابقه نجد أن أقل قيمه غير مغطاه بخط = ٢ [فى الصف (أ) عمود ٢] ، وبتطبيق هذه الخطوه نحصل على المصفوفه :

المهندس \ القريه	(١)	(٢)	(٣)
(أ)	صفر	صفر	١٤
(ب)	صفر	٢	٦
(جـ)	١٠	صفر	صفر

وفى المصفوفه الأخيره ، حيث أن عدد الصفوف أو عدد الأعمده = عدد الخطوط ، فإنه يمكن تحديد الحل الأمثل ، وذلك بتخصيص الصفوف والأعمده التى تحتوى على أصفار فرديه . فالصف (ب) يحتوى على صفر واحد فى العمود (١) ، نشطب الصف (ب) والعمود (١) :

	(٢)	(٣)
(أ)	صفر	١٤
(جـ)	صفر	صفر

الصف (أ) يحتوى على صفر واحد فى العمود (٢) ، ولذلك نشطب الصف (أ) والعمود (٢)

	(٣)
(جـ)	صفر

أى الصف (جـ) يحتوى على صفر واحد فى العمود (٣) .

ويكون التوزيع النهائى على النحو التالى :

المهندسين	القريه	التكلفه
(أ)	٢	٥٤
(ب)	١	٢٠
(جـ)	٣	٢٤
التكلفه الكليه		٩٨ جنيه يومياً

مثال (٢)

تقوم إحدى الشركات بإنتاج أربعة منتجات ويمكن تصنيع هذه المنتجات على أى آله من اللآلات الأربع المتوفره لدى الشركه ، وفيما يلى تكلفة إنتاج الوحده من كل منتج على كل آله :

الآلات / المنتجات	(١)	(٢)	(٣)	(٤)
(أ)	٤	٦	٣	٩
(ب)	٦	٣	٦	٤
(جـ)	٨	٦	٤	٦
(د)	٧	٥	٦	٨

والمطلوب تخصيص المنتجات الأربعه للآلات المتاحه بحيث تصل تكلفة الإنتاج إلى أقل حد ممكن ؟ .

الحـــل :

حيث أن الهدف المطلوب تحقيقه هو تخفيض التكلفه إلى أقل حد ممكن ، فـــإن الخطوه الأولى تتمثل فى طرح أقل قيمه فى كل عمود من قيم هــذا العمــود ، فنحصل على :

الآلات / المنتجات	(١)	(٢)	(٣)	(٤)
(أ)	صفر	٣	صفر	٥
(ب)	٢	صفر	٣	صفر
(جـ)	٤	٣	١	٢
(د)	٣	٢	٣	٤

وتتمثل الخطوه التاليه فى طرح أقل قيمه فى كل صف من جميع قيم هذا الصف ، مع ملاحظة أن الصفوف التى بها أصفار تظل كما هى ، فيكون :

المنتجات \ الآلات	(١)	(٢)	(٣)	(٤)
(أ)	صفر	٣	صفر	٥
(ب)	٢	صفر	٣	صفر
(جـ)	٣	٢	صفر	١
(د)	١	صفر	١	٢

وفى الخطوه التاليه نقوم بتغطية الصفوف والأعمده التى تحتوى على أصفار بأقل عدد ممكن من الخطوط .

وبرسم الخطوط نجد أن عدد الخطوط المستقيمه = عدد الصفوف أو الأعمده ، فنكون وصلنا إلى الحل الأمثل .

والخطوه التاليه هى لتحديد التخصيص الأمثل ، ونبدأ بتخصيص الصفوف التى تحتوى على صفر واحد ، أى :

جـ / ٣ و د / ٢ و أ / ١ و ب / ٤

وعلى ذلك يمكننا تحديد الحل الأمثل لهذه المشكله وتكلفة الحل كالآتى :

المنتج	الآله	التكلفه
(أ)	١	٤
(ب)	٤	٤
(جـ)	٣	٤
(د)	٢	٥
التكلفه الكليه		١٧

مثال (٣)

يوضح الجدول التالى وقت تشغيل كل أمر من أوامر الإنتاج على الآلات الأربعه المتاحه ، والمطلوب توزيع تلك الأوامر على الآلات بحيث يكون الوقت الكلى للتشغيل أقل ما يمكن :

الآلات / الأوامر	(أ)	(ب)	(جـ)	(د)
١	١٢	١٦	١٤	١٠
٢	٩	٨	١٣	٧
٣	١٥	١٢	٩	١١

الحــل :

حيث أن عدد الصفوف فى الجدول المعطى لايساوى عدد الأعمده فيلزم إضافة صف وهمى ليصبح عدد الصفوف = عدد الأعمده ٠

الآلات / الأوامر	(أ)	(ب)	(جـ)	(د)
١	١٢	١٦	١٤	١٠
٢	٩	٨	١٣	٧
٣	١٥	١٢	٩	١١
٤	صفر	صفر	صفر	صفر

وبطرح أقل قيمه فى كل صف من جميع قيم ذلك الصف ، يكون :

الآلات / الأوامر	(أ)	(ب)	(جـ)	(د)
١	٢	٦	٤	صفر
٢	٢	١	٦	صفر
٣	٦	٣	صفر	٢
٤	صفر	صفر	صفر	صفر

* بطرح أقل قيمه فى كل عمود من جميع قيم ذلك العمود ، نجد أن المصفوفه السابقه تظل كما هى ، لأن جميع أعمدتها تحتوى على صفر أو أكثر ٠

* برسم أقل عدد من الخطوط لتغطية الأعمده والصفوف التى تحتوى على أصفار، وحيث أن عدد الخطوط (٣) وهو لايساوى عدد الصفوف أو الأعمده (٤) ، يتطلب الأمر تنفيذ خطوه إضافيه كما سبق ، وبتنفيذ هذه الخطوه نحصل على المصفوفه التاليه :

الآلات / الأوامر	(أ)	(ب)	(جـ)	(د)
١	١	٥	٣	صفر
٢	١	صفر	٥	صفر
٣	٦	٣	صفر	٣
٤	صفر	صفر	صفر	١

وحيث أن عدد الخطوط = عدد الصفوف فإنه يمكن تحديد الحل الأمثل وذلك بالتخصيص التالى :

الأوامر	الآلات	وقت التشغيل
١	د	١٠
٢	ب	٨
٣	جـ	٩
٤	أ	--
الوقت الإجمالى		٢٧

ومن هذا الجدول الأخير لايوجد وقت تشغيل أمام الآله (أ) ، وهذا يعنى أن الآله أ لن تستخدم فى تشغيل أى من الأوامر الثلاث ٠

مثال (٤)

شُكلت لجنه من المسئولين بإدارة الأفراد بإحدى الشركات للإختيار من بين المتقدمين لشغل الوظائف الخاليه بالشركه والتى يبلغ عددها أربعة وظائف ، وقد بلغ عدد المتقدمين لشغل هذه الوظائف خمسة أفراد ، وفيما يلى الدرجات التى حصل عليها كل متقدم بالنسبه لكل وظيفه ، وتعكس هذه الدرجات مقدرة طالب الوظيفه على أداء واجباتها ٠

والمطلوب :

إختيار أفضل المتقدمين وتوزيعهم على الوظائف المختلفه ؟٠

الوظائف / الأشخاص	١	٢	٣	٤
أ	٦	٩	٥	٧
ب	٥	١	٧	٥
جـ	٢	٦	٩	٩
د	٢	٩	٧	٣
هـ	٤	٥	٦	٦

الحــل :

يُلاحظ من الجدول السابق عدم تساوى عدد الصفوف مع عدد الأعمده فيلـزم إضافة عمود وهمى جميع عناصره أصفاراً ليصبح عـدد الـصفوف = عـدد الأعمده = ٥ ، ومن ثم يصبح الجدول كما يلى :

الوظائف / الأشخاص	١	٢	٣	٤	٥
أ	٦	٩	٥	٧	صفر
ب	٥	١	٧	٥	صفر
جـ	٢	٦	٩	٩	صفر
د	٢	٩	٧	٣	صفر
هـ	٤	٥	٦	٦	صفر

يُلاحظ فى إعداد المصفوفه السابقه أننا أضفنا وظيفـه وهميـه رقـم (٥) ، وذلك لمساواة عدد الأعمده مع عدد الصفوف ليسهل حل المـشكله ، ومن الطبيعى أن الشخص الذى سيخصص لهذه الوظيفه لن يُعين بالشركه .

وبتكوين المصفوفه السابقه نأتى إلى تحديد الهدف المراد تحقيقه من التخصيص . ومن الواضح أن الهدف فى هذه الحاله يتمثل فى تحقيق أقـصى كفاءه ممكنه فى أداء هذه الوظائف .

وبالتالى فإن الخطوه الأولى فى حل هذه المشكله تتمثل فى طرح جميـع قـيم المصفوفه من أكبر قيمه بها ، وحيث أن أكبر قيمه بالمـصفوفه = ٩ ، فـإن المصفوفه الجديده تظهر كالآتى :

الوظائف / الأشخاص	١	٢	٣	٤	٥
أ	٣	صفر	٤	٢	٩
ب	٤	٨	٢	٤	٩
جـ	٧	٣	صفر	صفر	٩
د	٧	صفر	٢	٦	٩
هـ	٥	٤	٣	٣	٩

وفى الخطوه التاليه نقوم بطرح أقل قيمه فى كل عمود من جميع قيم ذلك العمود فنحصل على المصفوفه التاليه :

الوظائف / الأشخاص	١	٢	٣	٤	٥
أ	صفر	صفر	٤	٢	صفر
ب	١	٨	٢	٤	صفر
جـ	٤	٣	صفر	صفر	صفر
د	٤	صفر	٢	٦	صفر
هـ	٢	٤	٣	٣	صفر

وتتمثل الخطوه التاليه فى طرح أقل قيمه فى كل صف من جميع قيم هذا الصف ، ومن الجدير بالذكر أن جميع صفوف المصفوفه السابقه تحتوى على صفر واحد أو أكثر ، ومعنى هذا أن قيم تلك المصفوفه ستبقى كما هي دون تغيير نتيجة تنفيذ هذه الخطوه ٠ ومن ثم نقوم برسم أقل عدد ممكن من الخطوط لتغطية الأعمده والصفوف التى تحتوى على أصفار (ثلاث خطوط أفقيه تغطى الصفوف أ ، جـ ، د ، وخط رأسى واحد يغطى العمود رقم (٥)

ونظراً لأن عدد الخطوط = ٤ ، وهو لايساوى عدد الصفوف (٥) . فإن الأمر يتطلب تنفيذ خطوه إضافيه تتمثل فى تحديد أقل قيمه غير مغطاه بخط ، وطرح هذه القيمه من جميع القيم الغير مغطاه بخط ، ثم إضافتها إلى جميع القيم التى تقع عند تقاطع خطين وتظل جميع القيم الأخرى كما هى ٠

وفى المصفوفه السابقه نجد أن أقل قيمه غير مغطاه بخط =١ (فى الصف ب عمود ١) ، وبتنفيذ هذه الخطوه نحصل على المصفوفه التاليه :

الوظائف / الأشخاص	١	٢	٣	٤	٥
أ	صفر	صفر	٤	٢	١
ب	صفر	٧	١	٣	صفر
جـ	٤	٣	صفر	صفر	١
د	٤	صفر	٢	٦	١
هـ	١	٣	٢	٢	صفر

وبرسم أقل عدد ممكن من الخطوط لتغطية الأعمده والصفوف التى تحتوى على أصفار ، نجد أن عدد هذه الخطوط مازال = ٤ ، وهو أقل من عدد الصفوف ، وبالتالى يتطلب الأمر تكرار الخطوه السابقه ، وذلك بطرح أقل قيمه غير مغطاه بخط وإضافتها إلى جميع القيم التى تقع عند تقاطع خطين وتظل جميع القيم الأخرى كما هى .

وفى المصفوفه السابقه نجد أن أقل قيمه غير مغطاه بخط =١ (فى الصف ب عمود ٣) ، وبتنفيذ هذه الخطوه نحصل على المصفوفه التاليه :

الوظائف / الأشخاص	١	٢	٣	٤	٥
أ	صفر	صفر	٣	١	١
ب	صفر	٧	صفر	٢	صفر
جـ	٥	٤	صفر	صفر	٢
د	٤	صفر	١	٥	١
هـ	١	٣	١	١	صفر

وحيث أن عدد الخطوط = عدد الصفوف ، فإنه يمكن تحديد الحل الأمثل ، وذلك بتخصيص الفوف والإعمده التى تحتوى على أصفار فرديه ، فالصف (د) يحتوى على صفر واحد فى العمود (٢) ، والصف (هـ) يحتوى على صفر واحد فى العمود (٥) ، والعمود (٤) يحتوى على صفر واحد فى الصف (جـ) ، ويتبقى بعد ذلك تخصيص وظيفة كل من (أ ، ب)

وبمقارنة الأرقام الموضحه بهذه الخلايا ، نجد أن الوظيفه رقم (١) تفضل بالنسبه للشخص (أ) ، بينما يُفضل تخصيص الشخص (ب) للوظيفه رقم (٣)

ويكون التوزيع النهائى للأشخاص على الوظائف على النحو التالى :

الشخص	الوظيفه	درجة الكفاءه
أ	١	٦
ب	٣	٧
جـ	٤	٩
د	٢	٩
هـ	٥	يُستبعد
مجموع الدرجات		٣١

ويبقى لنا بعد المناقشه السابقه الملاحظات التاليه :

(١) إن طريقة التخصيص قد تعطى عدداً من الحلول البديله للمشكله ، ويُستدل على ذلك بوجود الأعمده والصفوف التى تحتوى على أكثر من صفر واحد فى الفوف النهائيه . وفى مثل هذه الحالات فإنه على متخذ القرار أن يختار أى بديل من البدائل المتاحه ، وأن يكون على ثقه بأنه لايمكن إجراء توزيع أفضل من ذلك .

(٢) إن إتباع طريقة التخصيص بالأسلوب السابق إيضاحه يصبح أمراً معقداً للغايه عندما يزداد عدد الصفوف والأعمده بالشكل الذى يصعب معه رسم الخطوط أو تنفيذ الخطوات المشار إليها سابقاً . وفى مثل هذه الحالات يمكن حل مشاكل التخصيص باستخدام طريقة (السمبلكس) ، وهى أحد أساليب البرمجه الخطيه التى تُستخدم فى هذا وعدد من الأغراض المشابهه .

مثال (٥)

أربعة منتجات جديده ترغب إحدى الشركات فى إنتاجها للسوق ، وممكن إنتاج هذه المنتجات فى أى قسم من الأقسام الأربعه بالشركه ، غير أن معدل الإنتاج اليومى يختلف من قسم إلى آخر نتيجة إختلاف الخبره ومهارات العمال بهذه الأقسام والمطلوب : تخصيص المنتجات الأربعه لهذه الأقسام بحيث يكون الإنتاج الكلى أكبر مايمكن ، إذا علمت أن معدل الإنتاج اليومى بكل قسم يظهر كما يلى :

المنتجات / الأقسام	م	هـ	د	ى
الأول	١٠٠	٦٠	١٢٠	٨٠
الثاني	١٠٠	٨٠	١٤٠	١٠٠
الثالث	١١٠	٧٥	١٥٠	١٢٠
الرابع	٨٥	٥٠	١٠٠	٧٥

الحـــل :

حيث أن الهدف هنا هو تحقيق أكبر إنتاج ممكن ، فإن الخطوه الأولــى تتمثــل فى طرح جميع قيم المصفوفه من أكبر قيمه بها ، وأكبر قيمه بالمــصفوفه = ١٥٠ ، وتكون المصفوفه الجديده هى :

المنتجات / الأقسام	م	هـ	د	ى
الأول	٥٠	٩٠	٣٠	٧٠
الثاني	٥٠	٧٠	١٠	٥٠
الثالث	٤٠	٧٥	صفر	٣٠
الرابع	٦٥	١٠٠	٥٠	٧٥

وتتمثل الخطوه التاليه فى طرح أقل قيمه فى كل عمود من جميــع قــيم هــذا العمود ، ويكون :

المنتجات / الأقسام	م	هـ	د	ى
الأول	١٠	٢٠	٣٠	٤٠
الثانى	١٠	صفر	١٠	٢٠
الثالث	صفر	٥	صفر	صفر
الرابع	٢٥	٣٠	٥٠	٤٥

وبطرح أقل قيمه فى كل صف من جميع قيم هذا الصف ، نحصل على المصفوفه التاليه :

المنتجات / الأقسام	م	هـ	د	ى
الأول	صفر	١٠	٢٠	٣٠
الثاني	١٠	صفر	١٠	٢٠
الثالث	صفر	٥	صفر	صفر
الرابع	صفر	٥	٢٥	٢٠

المنتجات / الأقسام	م	هـ	د	ى
الأول	صفر	٥	١٥	٢٥
الثانى	١٥	صفر	١٠	٢٠
الثالث	٥	٥	صفر	صفر
الرابع	صفر	صفر	٢٠	١٥

المنتجات / الأقسام	م	هـ	د	ى
الأول	صفر	٥	٥	١٥
الثانى	١٥	صفر	صفر	١٠
الثالث	١٥	١٥	صفر	صفر
الرابع	صفر	صفر	١٠	٥

وعلى ذلك يكون التخصيص على النحو التالى :

التخصيص			معدل الإنتاج
القسم الأول /م	القسم الأول	يُخصص لـ م	١٠٠
القسم الرابع /هـ	القسم الثانى	يُخصص لـ هـ	١٤٠
القسم الثانى / د	القسم الثالث	يخصص لـ د	١٢٠
القسم الثالث / ى	القسم الرابع	يُخصص لـ ى	٥٠
الإجمالى			٤١٠ أكبر مايمكن

مثال (٦)

فيما يلى الدرجات التى حصل عليها أربعة أشخاص تقدموا لشغل أربعة وظائف بإحدى الشركات ، والمطلوب : توزيع هؤلاء الأشخاص على الوظائف الأربع بحيث يكون مستوى الكفاءه أكبر ما يمكن ؟ ،

الوظائف / الأشخاص	أ	ب	جـ	د
١	٩	٤	٥	٩
٢	٥	١	٣	٦
٣	٦	٥	٤	٦
٤	٨	٤	٥	٦

الحـــل :

طرح قيم المصفوفه من أكبرقيمه بها وهى (٩) :

الوظائف / الأشخاص	أ	ب	جـ	د
١	صفر	٥	٤	صفر
٢	٤	٨	٦	٣
٣	٣	٤	٥	٣
٤	١	٥	٤	٣

طرح أقل قيمه فى كل عمود من جميع قيم ذلك العمود :

الوظائف / الأشخاص	أ	ب	جـ	د
١	صفر	١	صفر	صفر
٢	٤	٤	٢	٣
٣	٣	صفر	١	٣
٤	١	١	صفر	٣

طرح أقل قيمه فى كل صف من جميع قيم ذلك الصف :

الوظائف / الأشخاص	أ	ب	جـ	د
١	صفر	١	صفر	صفر
٢	٢	٢	صفر	١
٣	٣	صفر	١	٣
٤	١	١	صفر	٣

الوظائف / الأشخاص	أ	ب	جـ	د
١	صفر	١	١	صفر
٢	١	١	صفر	صفر
٣	٣	صفر	٢	٣
٤	صفر	صفر	صفر	٢

وحيث أن عدد الخطوط = عدد الصفوف ، فنكون وصلنا للحل الأمثل ، ويتم التخصيص كما يلى :

		درجة الكفاءه
٣ / ب	الشخص الثالث يُخصص للوظيفه ب	٥
١ / أ	الشخص الأول يُخصص للوظيفه أ	٩
٤ / جـ	الشخص الرابع يُخصص للوظيفه جـ	٥
٢ / د	الشخص الثانى يُخصص للوظيفه د	٦
الإجمالى		٢٥ أكبر مايمكن

مثال (٧)

إفترض وجود ثلاث أوامر إنتاجيه يُراد تخصيصها للتشغيل على ثلاث آلات مختلفه ، بحيث يُعهد إلى كل آله تشغيل أمر إنتاجي واحد ، فإذا كانت تكلفة تشغيل كل أمر من هذه الأوامر على كل نوع من أنواع تلك الآلات كما يلي :

الآله / الأمر الإنتاجي	(١)	(٢)	(٣)
١	٢٠	٢٧	٣٠
٢	١٠	١٨	١٦
٣	١٤	١٦	١٢

والمطلوب تخصيص كل أمر من هذه الأوامر على كل آله من الآلات الثلاث بحيث يتم إنجاز هذه الأوامر بأقل تكلفه ممكنه ، ثم إحسب هذه التكلفه ؟ .

الحـــل :

باختيار أصغر رقم فى كل عمود وطرحه من جميع عناصر العمود ، الرقم ١٠ بالنسبه للعمود الأول ، والرقم ١٦ بالنسبه للعمود الثانى ، والرقم ١٢ بالنسبه للعمود الثالث ، نحصل على :

الآله / الأمر الإنتاجي	(١)	(٢)	(٣)
١	١٠	١١	١٨
٢	صفر	٢	٤
٣	٤	صفر	صفر

باختيار أصغر رقم فى كل صف وطرحه من جميع عناصر الصف ، الرقم ١٠ بالنسبه للصف الأول ، والرقم صفر بالنسبه للصف الثانى ، والرقم صفر بالنسبه للصف الثالث ، نحصل على :

الآله / الأمر الإنتاجي	(١)	(٢)	(٣)
١	صفر	١	٨
٢	صفر	٢	٤
٣	٤	صفر	صفر

باختيار أصغر عنصر من العناصر الغير مغطاه (وهو الواحد) وطرحه من بقية العناصر الغير مغطاه وإضافته إلى جميع العناصر التى تقع عند تقاطع خطين نحصل على :

الآله / الأمر الإنتاجى	(١)	(٢)	(٣)
١	صفر	صفر	٧
٢	صفر	١	٣
٣	٥	صفر	صفر

وعلى ذلك يكون وصلنا للحل الأمثل الذي يحقق أقل تكلفه ، حيث يتم تشغيل الأمر الإنتاجى الأول على الآله الثانيه ، وتشغيل الأمر الإنتاجى الثانى على الآله الأولى ، وتشغيل الأمر الإنتاجى الثالث على الآله الثالثه ، ومن ثم تكون تكلفة تشغيل هذه الأوامر الإنتاجيه الثلاث كما يلى :

الأوامر	الآلات	التكلفه
١	٢	٢٧
٢	١	١٠
٣	٣	١٢
التكلفه الكليه		٤٩

مثال (٨)

حدد التخصيص الأمثل لأوامر الإنتاج التاليه على الآلات المتاحه فى ضوء وقت التشغيل الموضح بالجدول التالى :

الآلات / الأوامر	أ	ب	جـ	د
١	٨	٦	٢	٤
٢	٦	٧	١١	١٠
٣	٣	٥	٧	٦
٤	٥	١٠	١٢	٩

الحـــل :

بتطبيق خطوات التخصيص السابق توضيحها فى هذا الفصل نحصل على جدول الحل الأمثل التالى :

الأوامر / الآلات	أ	ب	جـ	د
١	٧	٣	صفر	صفر
٢	١	صفر	٥	٢
٣	صفر	صفر	٣	صفر
٤	صفر	٣	٦	١

ومن هذا الحل الأمثل ، يتم تشغيل الأمر الإنتاجى الأول على الآله جـ ، وتشغيل الأمر الإنتاجى الثانى على الآله ب ، وتشغيل الأمر الإنتاجى الثالث على الآله د ، وتشغيل الأمر الإنتاجى الرابع على الآله أ ، ومن ثم يكون وقت التشغيل كما يلى :

الأوامر	الآلات	وقت التشغيل
١	جـ	٢
٢	ب	٧
٣	د	٦
٤	أ	٥
إجمالى وقت التشغيل		٢٠

مثال (٩)

بفرض وجود أربعة وظائف يجب تخصيصها بالنسبه لأربعة مراكز أعمال ، بحيث يتم تخصيص وظيفه واحده فقط لكل مركز ، وكانت تكلفة إنجاز كل وظيفه من خلال كل من مراكز العمل المختلفه كما يلى ؟ .

الوظيفه \ المركز	١	٢	٣	٤
أ	٥٠	٤٥	٥٠	٦٥
ب	٢٥	٤٠	٣٥	٢٠
جـ	٦٥	٦٠	٥٥	٦٥
د	٥٥	٦٥	٧٥	٨٥

والمطلوب إستخدام طريقة التخصيص لتحديد الوظيفه التى يقوم بها كل مركز عمل بحيث يحاقق الحد الأدنى للتكلفه الكليه ، واحسب مقدار هذه التكلفه ؟.

الحـــل :

بتطبيق خطوات التخصيص السابق توضيحها فى هذا الفصل نحصل على جدول الحل الأمثل التالى :

الوظيفه \ المركز	١	٢	٣	٤
أ	٥	صفر	٥	٢٠
ب	٥	٢٠	١٥	صفر
جـ	١٠	٥	صفر	١٠
د	صفر	١٠	٢٠	٣٠

ومن هذا الحل الأمثل ، يتم شغل الوظيفه (أ) بمركز العمل (٢) ، و يتم شغل الوظيفه (ب) بمركز العمل (٤) ، و يتم شغل الوظيفه (جـ) بمركز العمل (٣) ، و يتم شغل الوظيفه (د) بمركز العمل (١) ، ويكون :

الوظيفه	مركز العمل	التكلفه
أ	٢	٤٥
ب	٤	٢٠
جـ	٣	٥٥
د	١	٥٥
التكلفه الإجماليه		١٧٥

مثال (١٠)

الجدول التالى يبين تكاليف إنجاز أربعة مشاريع من خلال أربعه من العاملين المتخصصين بحيث يقوم كل عامل متخصص بتأدية مشروع واحد فقط :

المشروع / العامل	١	٢	٣	٤
أ	٣٠٠	٣٢٥	٥٠٠	٣٥٠
ب	٤٠٠	٥٢٥	٥٧٥	٦٠٠
جـ	٣٥٠	٤٠٠	٦٠٠	٥٠٠
د	٤٠٠	٣٥٠	٤٥٠	٤٥٠

والمطلوب تخصيص هذه المشروعات على العمال الأربعه بما يحقق الحد الأدنى للتكلفه الكليه ، واحسب مقدار تلك التكلفه ؟.

الحـــل :

بتطبيق خطوات التخصيص السابق توضيحها فى هذا الفصل نحصل على جدول الحل الأمثل التالى :

المشروع / العامل	١	٢	٣	٤
أ	٥٠	٢٥	١٠٠	صفر
ب	صفر	٧٥	٢٥	١٠٠
جـ	صفر	صفر	١٠٠	٥٠
د	١٠٠	صفر	صفر	٥٠

يتضح أنه يجب أن يتم التخصيص للمشروعات الأربعه على العاملين كما يلى :

العامل	المشروع	التكلفه
أ	٤	٣٥٠
ب	١	٤٠٠
جـ	٢	٤٠٠
د	٣	٤٥٠
التكلفه الكليه (أدنى تكلفه كليه ممكنه)		١٦٠٠

مثال (١١)

تمتلك شركه مصر للطيران ثلاث ورش صيانة تحتفظ كل منها بموتور احتياطي للطائرة البوينج ٧٤٧ في كل من نيويورك ولندن ونيودلهي ، وإذا تعطلت إحدى الطائرات بأي مدينة واحتاجت إلى متور إضافي نقل الموتور من أحد الورش الثلاث إلى مكان تواجد الطائرة، وفي صباح ذات يوم تلقى مدير غرفة عمليات الشركة بالقاهرة ٣ بلاغات بأن هناك ٣ طائرات في كل من أثينا والبحرين وسلزبورج في حاجة إلى مواتير ، والجدول التالي يبين تكلفة نقل الموتور من أماكن تخزينها إلى أماكن تواجد الطائرات :

من	إلى	التكلفة بالدولار
نيويورك	أثينا	٧٠٠
	البحرين	١٠٠٠
	سالزبورج	٥٠٠
لندن	أثينا	٤٠٠
	البحرين	٨٠٠
	سالزبورج	٧٠٠
نيودلهى	أثينا	١١٠٠
	البحرين	٧٠٠
	سالزبورج	١٥٠٠

والمطلوب :

١. إلى أي مدينة يجب شحن المواتير الثلاث.

٢. إذا عرضت خطوط الطيران الأولمبية باليونان إمداد شركة مصر للطيران بموتور لإصلاح الطائرة الموجودة في أثينا وذلك نظير تكلفة ٣٠٠ دولار ، فهل تقبل شركة مصر للطيران هذا العرض ؟

٣. إذا كانت شركة مصر للطيران قد احتفظت بموتور ثان بمخازنها بلندن نظير تكلفة تخزين قدرها ٢٠٠ دولار فهل تعتقد أن هذا الأمر مفيد للشركة؟

ـــل :

- بناء جدول التخصيص الذي يعبر عن المشكلة :

من \ إلى	أثينا	البحرين	سالزبورج
نيويورك	٧٠٠	١٠٠٠	٥٠٠
لندن	٤٠٠	٨٠٠	٧٠٠
نيو دلهي	١١٠٠	٧٠٠	١٥٠٠

من \ إلى	أثينا	البحرين	سالزبورج
نيويورك	٢٠٠	٥٠٠	صفر
لندن	صفر	٤٠٠	٣٠٠
نيو دلهي	٤٠٠	صفر	٨٠٠

ـن هنا نجد أن :

ـد الخطوط = عدد الصفوف = عدد الأعمدة = ٣ ، ويمكن البدء في عملية ـخصيص.

		التكلفة
من نيويورك	إلى سالزبورج	٥٠٠
من لندن	إلى أثينا	٤٠٠
من نيو دلهي	إلى البحرين	٧٠٠
		١٦٠٠

٢- دراسة عرض خطوط الطيران الأولمبية :

ووفقاً لهذا العرض نكون المصفوفة التالية :

من / إلى	أثينا	البحرين	سالزبورج	عمود جديد
نيويورك	٢٠٠	٥٠٠	صفر	صفر
لندن	صفر	٤٠٠	٣٠٠	صفر
نيو دلهي	٤٠٠	صفر	٨٠٠	صفر
أثينا	٣٠٠	٢٠٠٠	٢٠٠٠	صفر

من / إلى	أثينا	البحرين	سالزبورج	عمود جديد
نيويورك	٤٠٠	٣٠٠	صفر	صفر
لندن	١٠٠	١٠٠	٢٠٠	صفر
نيو دلهي	٨٠٠	صفر	١٠٠٠	صفر
أثينا	صفر	١٣٠٠	١٥٠٠	صفر

	التكلفة
نيويورك / سالزبورج	٥٠٠
نيو دلهي / البحرين	٧٠٠
أثينا / أثينا	٣٠٠
	١٥٠٠

ولا يوجد تخصيص للندن .

٣- في حالة وجود موتور ثان بلندن :

من \ إلى	أثينا	البحرين	سالزبورج	عمود جديد
نيويورك	٧٠٠	١٠٠٠	٥٠٠	صفر
لندن (١)	٤٠٠	٨٠٠	٧٠٠	صفر
لندن (٢)	٦٠٠	١٠٠٠	٩٠٠	صفر
نيو دلهي	١١٠٠	٧٠٠	١٥٠٠	صفر

من \ إلى	أثينا	البحرين	سالزبورج	عمود جديد
نيويورك	٣٠٠	٣٠٠	صفر	صفر
لندن (١)	صفر	٢٠٠	٢٠٠	صفر
لندن (٢)	٢٠٠	٣٠٠	٤٠٠	صفر
نيو دلهي	٧٠٠	صفر	١٠٠٠	صفر

ويكون التخصيص :

	التكلفة
نيويورك / سالزبورج	٥٠٠
لندن (١) / أثينا	٤٠٠
نيودلهي / البحرين	٧٠٠
	١٦٠٠

ويكون اجمالي التكاليف ١٦٠٠ ، وهو نفس التخصيص الوارد في المطلوب الأول ، وهذا يعنى رفض الإحتفاظ بموتور ثان بمخازن الشركة بلندن.

تمارين على نماذج التخصيص

(١) حصلت إحدى الشركات على خمس عطاءات لإصلاح وصيانة الآلات والمعدات الموجوده بأقسامها الإنتاجيه الأربعه ، وفيمايلى قيمة العطاءات التى تقدم بها كل مقاول ، والمطلوب إختيار وتخصيص أنسب المقاولين لإتمام عمليات الصيانه بأقل تكلفه إجماليه ممكنه :

القسم / المقاول	قسم (١)	قسم (٢)	قسم (٣)	قسم (٤)
أ	١٠٠٠	١٢٠٠	١٠٠٠	١٢٠٠
ب	١١٠٠	١٤٠٠	١٣٠٠	١٢٠٠
جـ	١٢٠٠	١١٠٠	١٢٠٠	١٠٠٠
د	١٣٠٠	١٣٠٠	١٠٠٠	١٣٠٠
هـ	١٢٥٠	١٢٥٠	١٢٥٠	١٢٥٠

(٢) تتولى إحدى الشركات توزيع منتجاتها فى عدة مناطق بيعيه ، وتقوم بمحاسبة مندوبى البيع على أساس راتب ثابت بالإضافه إلى مبلغ محدد عن كل كيلومتر يسافره المندوب من الفرع الذى يوجد به إلى المناطق البيعيه التى يتولى تصريف منتجات الشركه بها ، وتوجد فروع الشركه فى أربعة مواقع هى (س ، ص ، ع ، ل) ، وتنقسم المناطق البيعيه للشركه إلى ثلاث مناطق هى (أ ، ب ، جـ) ، وفيما يلى مسافة السفر من كل موقع إلى كل منطقه ، والمطلوب تحديد من أى فروع الشركه يتم تخصيص المندوبين للمواقع بحيث يكون إجمالى مسافات السفر أقل ما يمكن .

المنطقه البيعيه / مواقع الفروع	(أ)	(ب)	(جـ)
س	٥٠	٣٦	١٦
ص	٢٨	٣٠	١٨
ع	٣٥	٣٢	٢٠
ل	٢٥	٢٥	١٤

(٣) أربعة عمليات إنتاجيه ضروريه لتصنيع أحد المنتجات ، ويمكن أداء هذه العمليات الأربع على أى آله من الآلات الأربع المتاحه لدى الشركه ، ولكن وقت التصنيع يختلف من آله لأخرى ، حسب عمرها أو مدة إستخدامها فى الشركه ، وذلك على النحو التالى فيما بعد .

والمطلوب : تحديد أى العمليات الإنتاجيه يتم أداؤه على كل آله بحيث يكون الوقت الإجمالى أقل ما يمكن ، مع العلم بأن الآله التى عمرها ٦ سنوات لايمكنها أداء العمليه جـ بأي حال من الأحوال :

العمليات / الآلات	أ	ب	جـ	د
آله جديده	٨	٦	١٠	١٥
آله عمرها٢ سنه	١١	١٠	١٢	٢٠
آله عمرها ٤ سنه	١٢	١٢	١٢	٢٢
آله عمرها ٦ سنه	١٨	٢٠	--	٢٥

(٤) أربعة منتجات جديده ترغب إحدى الشركات فى إنتاجها للسوق ، ويمكن إنتاج هذه المنتجات فى أى قسم من الأقسام الأربعه بالشركه ، غير أن معدل الإنتاج اليومى يختلف من قسم لآخر نتيجة إختلاف الخبره ومهارات العمال بهذه الأقسام ، والمطلوب تخصيص المنتجات الأربعه لهذه الأقسام بحيث يكون الناتج الكلى أكبر ما يمكن ، إذا علمت أن معدل الإنتاج اليومى بكل قسم يظهر كما يلى :

المنتجات / الأقسام	م	هـ	د	ى
القسم الأول	١٠٠	٦٠	١٢٠	٨٠
القسم الثانى	١٠٠	٨٠	١٤٠	١٠٠
القسم الثالث	١١٠	٧٥	١٥٠	١٢٠
القسم الرابع	٨٥	٥٠	١٠٠	٧٥

الفصل السابع

نظرية صفوف الإنتظار

The Queuing Theory

تنشأ مشكلة صفوف الإنتظار فى حالتين :

الأولى : إذا كان معدل وصول العملاء وطالبى الخدمه سريعاً بدرجه تفوق معدل أداء الخدمه من جانب من يعمل بمركز الخدمه ٠

الثانيه : إذا كان معدل أداء الخدمه أسرع من معدل وصول العملاء ، بمعنى وجود وحدات تأدية خدمه عاطله بدون عمل ٠

وتهدف نظرية صفوف الإنتظار إلى علاج مشكلات الإنتظار بشقيها حتى نصل إلى الموقف الأمثل الذى يحقق خفضاً فى وقت الإنتظار لكل من العملاء طالبى الخدمه ، ووحدات تأدية الخدمه ، بحيث تصبح تكلفة الإنتظار أقل ما يمكن وتُستخدم نظرية صفوف الإنتظار على نطاق واسع فى جميع المنشآت الإنتاجيه والخدميه كوسيله رياضيه لخدمة الإداره ، فنجد مثلاً فى شركه صناعيه أن الطلب على قطع الغيار والمواد الخام من جانب عمال المصنع قد يزيد فى أحوال كثيره عن طاقة موظفى المخزن ، وهنا يضطر العمال للوقوف وقتاً طويلاً أمام المخزن حتى يتسنى لهم صرف ما يحتاجونه

ومما سبق يتضح أن هناك شرطين أساسيين لتطبيق نظرية صفوف الإنتظار ، وهما :

(١) وجود وحدات من طالبى الخدمه مثل العملاء ، الطائرات ، السفن ، الآلات ، السيارات ، المرضى ، ٠٠٠٠٠ إلخ٠

(٢) وجود وحدات لتأدية الخدمه مثل : البنوك ، الموانئ ، المطارات ، وحدات الصيانه ، محطات البنزين ، المستشفيات ، ٠٠٠٠٠ إلخ ٠

وذلك مع وجود زياده فى معدل وصول وحدات طالبى الخدمه تفوق طاقة الوحدات مقدمة الخدمه أو العكس ٠

وقد يرى البعض أنه من الممكن حل هذه المشاكل عن طريق زيادة مراكز الخدمه (الوحدات مقدمة الخدمه) بدرجه تمكنها من تلبية طلبات ى الخدمه ، إلا أن ذلك يعنى ببساطه زياده كبيره فى التكاليف ، ومن ناحيه ـانت الطاقه المتاحه للوحدات مقدمة الخدمه قاصره عن تلبية طلبات طالب ـمه ، فإن ذلك معناه ضياع فرص متاحه (إنصراف طالبى الخدمه لأنهم لم ـوا الإنتظار الطويل) ٠

ولدراسة نظرية صفوف الإنتظار وتطبيقها ، يتعين معرفة :

) وقت حضور طالبى الخدمه فى المتوسط ٠

) متوسط وقت أداء الخدمه ٠

) عدد مراكز الخدمه الموجوده ٠

ـكاليف الكلية المتوقعة:

ـن تقسيم التكاليف الكلية المتوقعة إلى قسمين :

١. تكاليف وقت الإنتظار٠
٢. تكاليف أداء الخدمة (تكاليف مستوى الخدمه)٠

ـديد الحجم الأمثل لمستوى الخدمه ، وتحديد علاقة تكاليف وقت الإنتظار ـليف مستوى الخدمة نتناول الأمثلة التالية :

ـل (١)

ـة مصر لأعمال الشحن والتفريغ تقدم خدماتها بواسطة فرق عمل ، ويمكن ـيل فريق عمل واحد أو فريقين أو ثلاث فرق عمل (تكلفة تشغيل كل فريق ٥٠ جنيه) وكل سفينة تستغرق ١٠ أيام لحين تفريغها في حالة تشغيل ـق عمل واحد ، ٦ أيام في حالة تشغيل فريقين ، ٤ أيام في حالة تشغيل ـث فرق ، كما أن يوم الإنتظار الواحد يكلف السفينة ٢٠٠٠ جنيه ، وأن ـسط عدد السفن التي تصل في اليوم الواحد = ١٠ سفن

ـطلوب : تحديد عدد فرق العمل الأمثل الذي يؤدي إلى وصول التكلفة إلى ـقدر ممكن ؟

في هذه الحالة ، يكون :

بيان	عدد فرق العمل		
	(١)	(٢)	(٣)
١-عدد السفن التي تصل يومياً	١٠	١٠	١٠
٢-معدل وقت انتظار السفينة باليوم	١٠	٦	٤
٣-وقت الإنتظار الكلي باليوم	١٠٠	٦٠	٤٠
٤-تكاليف الإنتظار بالجنيه	٢٠٠٠٠٠	١٢٠٠٠٠	٨٠٠٠٠
٥-أجور فرق العمل	٥٠٠٠٠	١٠٠٠٠٠	١٥٠٠٠٠
٦-التكاليف الكلية	٢٥٠٠٠٠	٢٢٠٠٠٠	٢٣٠٠٠٠

ومن الجدول السابق يتضح أن الحل الأمثل تشغيل مجموعتيْ عمل للوصول بالتكلفة إلى أقل قدر ممكن.

وتظهر مشكلة صفوف الإنتظار من خلال تفاعل العناصر التالية :

(١) معدل الوصول :

متوسط عدد الوحدات الواردة خلال وحدة زمن معينة (دقيقة ، ساعة ، يوم ، أسبوع ، ... الخ).

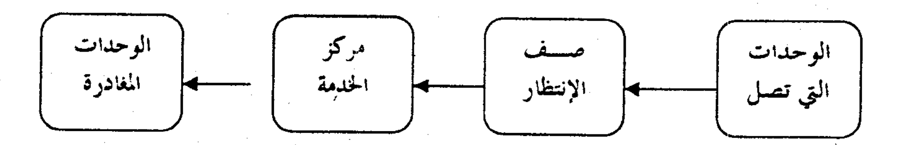
(٢) معدل تأدية الخدمة :

متوسط عدد الوحدات التي تُخدم في مركز الخدمة خلال وحدة زمن معينة (دقيقة ، ساعة ، يوم ، أسبوع ، ... الخ).

(٣) نظام الخدمة :

المفروض في صفوف الإنتظار تحقيق قاعدة الوارد أولاً يُخدم أولاً ، وأيضاً العمل في مركز واحد للخدمة أو عدة مراكز للخدمة.

وسنقتصر في هذه الدراسة على نموذج خط الإنتظار ذو مركز الخدمة الواحد (قناه واحدة)



نظام خطوط الإنتظار

نموذج صف الإنتظار ذات القناه الواحده

يشير مُصطلح "قناه" إلى عدد مواقع الدخول إلى نظام الخدمه ، وتعنى القناه الواحده ، أنه يوجد موقع واحد للدخول ، ويُعتبر نموذج صف الإنتظار ذات القناه الواحده من أكثر نماذج صفوف الإنتظار إستخداماً وأكثرها سهولةً ، ويقوم هذا النموذج على الإفتراضات الآتيه :

(١) يتم خدمة الوحدات طالبة الخدمه على أساس أن الوحدات التى تصل أولاً تُخدم أولاً ،

(٢) ينتظر كل طالب خدمه حتى يتم خدمته بصرف النظر عن طول الصف ،

(٣) تكون الوحدات طالبة الخدمه مستقله عن الوحدات السابقه عليها ، ولكن متوسط عدد الوحدات طالبة الخدمه (معدل الوصول) لايتغير بمرور الوقت ،

(٤) يتم تصوير الوحدات طالبة الخدمه باستخدام توزيع بواسون الإحتمالى ، وتصل هذه الوحدات من مجتمع غير محدود (كبير جداً) ،

(٥) تختلف أوقات الخدمه من عميل لآخر ، وتكون هذه الأوقات مستقله بالنسبه لكل عميل ، ولكن يكون متوسط المعدل الخاص بها معلوم ،

(٦) تظهر أوقات الخدمه طبقاً للتوزيع الإحتمالى الأسى السالب .

(٧) أن متوسط معدل الخدمه أكبر من متوسط معدل الوصول .

(٨) يُعتبر نظام الصف نظام ثابت .

وعندما تتوافر هذه الإفتراضات ، فإنه يمكن تكوين مجموعه من المعادلات التى تحدد الخصائص التشغيليه لصف الإنتظار والمستخدمه بصوره شائعه ، ويُستخدم فى هذه المعادلات الرموز التاليه :

[أ] : معدل الوصول ، أي متوسط عدد العملاء خلال فتره زمنيه معينه (ساعه مثلاً) .

[ب] : معدل أداء الخدمه ، أي متوسط عدد الوحدات التى يتم خدمتها خلال فتره زمنيه معينه (ساعه مثلاً) .

وتُستخدم المعادلات التاليه فى نموذج صف الإنتظار ذات القناه الواحده :

(١) س : متوسط عدد طالبى الخدمه (العملاء) فى النظام (عدد طالبى الخدمه فى الصف ، بالإضافه إلى العدد الذى يتلقى الخدمه) .

$$\text{س} = \frac{\text{أ}}{\text{ب} - \text{أ}}$$

(٢) ص : متوسط الوقت الذى يقضيه طالب الخدمه في النظام (الوقت المنقضى فى الصف ، بالإضافه إلى الوقت المنقضى فى تقديم الخدمه) .

$$\text{ص} = \frac{1}{\text{ب} - \text{أ}}$$

(٣) $س_و$: متوسط عدد طالبي الخدمه (العملاء) فى الصف ٠

$$س_و = \frac{أ^٢}{ب (ب - أ)}$$

(٤) $ص_و$: متوسط وقت الإنتظار فى الصف ٠

$$ص_و = \frac{أ}{ب (ب - أ)}$$

(٥) خ : معامل الإستخدام فى النظام ، بمعنى إحتمال أن يكون جهاز خدمه مُستخدم - كثافة التشغيل ، أي إحتمال إنتظار عميل واحد بصف إنتظار :

$$خ = \frac{أ}{ب}$$

(٦) $ل_{صفر}$: إحتمال عدم وجود طالب خدمه بالنظام :

$$ل_{صفر} = ١ - \frac{أ}{ب}$$

(٧) $ل_ن$: إحتمال وجود عدد (ن) من طالبي الخدمه فى النظام :

$$ل_ن = \left(١ - \frac{أ}{ب}\right) \times \left(\frac{أ}{ب}\right)^ن$$

(٨) ل (ن > ك) : إحتمال أن يكون عدد العملاء فى الصف أكبر من ك ، حيث أن ك يمثل رقم عشوائى) :

$$ل(ن > ك) = \left(\frac{أ}{ب}\right)^{ك+١}$$

مثال (٢)

صاحب ورشه لتصليح السيارات لديه عامل ميكانيكى واحد يقوم بتركيب ملفات السيارات ، ويستطيع هذا العامل تركيب ملفات جديده بمعدل متوسط قدره ثلاثة ملفات فى اليوم ، (أى حوالى ٢٠ دقيقه لكل سياره) ، ويصل العملاء الذين يحتاجون هذه الخدمه إلى الورشه بمتوسط سيارتين فى اليوم ، ومن ثم ، فإن أ = ٢ ، ب = ٣

وحيث أن $\frac{أ}{ب} < ١$ ، فإننا نستخدم العلاقات التاليه :

(١) $س = \frac{أ}{ب - أ} = \frac{٢}{٣ - ٢} = ٢$ سياره

أي أنه يوجد فى المتوسط ٢ عميل فى النظام .

(٢) $ص = \frac{١}{ب - أ} = \frac{١}{٣ - ٢} = ١$ ساعه

أي أن كل عميل يقضى ، فى المتوسط ساعه فى النظام .

(٣) $س_و = \frac{أ^٢}{ب (ب - أ)} = \frac{٢^٢}{٣ (٣ - ٢)} = ١,٣٣$ سياره

بمعنى أنه يوجد ١,٣٣ سياره تنتظر فى الصف للحصول على الخدمه .

(٤) $ص_و = \frac{أ}{ب (ب - أ)} = \frac{٢}{٣ (٣ - ٢)} = \frac{٢}{٣}$ ساعه = ٤٠ دقيقه

بمعنى أن كل سياره سوف تقضى فى المتوسط ، ٤٠ دقيقه فى صف الإنتظار

(٥) $خ = \frac{أ}{ب} = \frac{٢}{٣} = ٠,٦٧$

بمعنى إحتمال أن يكون العامل مشغول = ٠,٦٧

٦) $\text{ل}_{\text{صفر}} = ١ - \frac{\text{أ}}{\text{ب}} = ١ - \frac{٢}{٣} = \frac{١}{٣} = ٠,٣٣$

بمعنى أن إحتمال عدم وجود أي سياره فى النظام = ٠,٣٣

٧) إحتمال وجود (ن) من السيارات (وليكن ٣ سيارات) فى النظام =

$$\text{ل}_{\text{ن}} = \left(١ - \frac{\text{أ}}{\text{ب}}\right) \times \left(\frac{\text{أ}}{\text{ب}}\right)^{\text{ن}}$$

$$\text{ل}_{٣} = \left(١ - \frac{٢}{٣}\right) \times \left(\frac{٢}{٣}\right)^{٣}$$

$$= \frac{١}{٣} \times \frac{٨}{٢٧} = \frac{٨}{٨١} = ٠,٠٩٨$$

٨) ل (ن > ك) : إحتمال أن يكون عدد العملاء فى الصف أكبر من ك ، حيث أن ك = رقم عشوائى ، يجب توزيع الإحتمالات المجمعه للسيارات فى ف الإنتظار كالآتى :

ك	$\text{ل}(\text{ن} > \text{ك}) = \left(\frac{\text{أ}}{\text{ب}}\right)^{\text{ك}+١}$
صفر	٠,٦٦٧
١	٠,٤٤٤
٢	٠,٢٩٦
٣	٠,١٩٨
٤	٠,١٣٢
٥	٠,٠٨٨
٦	٠,٠٥٨
٧	٠,٠٣٩

والآن بعد أن قام صاحب الورشه بحساب خصائص نظام الصفوف ، قرر أن يقوم بتحليل تأثير هذه الخصائص إقتصادياً ، ويعتبر نموذج صفوف الإنتظار ذو أهميه كبرى فى التنبؤ بالأوقات المحتمله للإنتظار ، طول الصف ، الأوقات العاطله ، وهكذا • ومع ذلك فإن هذا النموذج لا يحدد القرارات المثلى الواجب إتخاذها ، كما أنه لم يأخذ فى إعتباره العوامل المتعلقه بالتكلفه •

وحيث أن حل مشكلة الصفوف يتطلب من الإداره أن تقوم بالمفاضله بين تكلفه متزايده لتوفير خدمه أفضل وتكلفة إنتظار متناقصه نتيجة توفير الخدمه •

وقد قدر صاحب الورشه أن تكلفة وقت إنتظار العميل فى صورة عدم رضاء العميل وخسارة شهرة الورشه بمبلغ ١٠ جنيهات فى كل ساعه من الوقت المنقضى فى الإنتظار ، وحيث أن متوسط وقت الإنتظار فى الصف $\frac{٢}{٣}$ ساعه ، وتصل ١٦ سياره فى المتوسط إلى الورشه كل يوم (بفرض أن عدد ساعات العمل بالورشه ٨ ساعات يومياً) ، فإن إجمالى عدد الساعات التى تقضيها السيارات فى الإنتظار كل يوم تبلغ :

$$\frac{٢}{٣} \times ١٦ = \frac{٣٢}{٣} \text{ ساعه}$$

ومن ثم ، تكون :

تكلفة إنتظار العميل = ١٠ جنيه فى الساعه × $\frac{٣٢}{٣}$ ساعه/ يوم = ١٠٦ جنيه

والتكلفه الأخرى المهمه التى يمكن لصاحب الورشه أن يحددها فى موقع الصف هى أجر الميكانيكى الذى يعمل لديه ، وبفرض أن الميكانيكى يحصل على ٣ جنيه فى الساعه ، أى ٢٤ جنيه فى اليوم •

ومن ثم فإن : التكاليف تبلغ ١٠٦ + ٢٤ = ١٣٠ جنيه فى اليوم

وقد علم صاحب الورشه أنه يوجد ميكانيكى آخر أكثر كفاءه من الميكانيكى الذى يعمل لديه ، حيث أنه يستطيع أن يركب ٤ ملفات فى الساعه ، ولكنه يحصل على أجر قدره ٤ جنيه فى الساعه ، وقد قام صاحب الورشه اولاً بإعادة حساب الخصائص التشغيليه باستخدام معدل الخدمه الجديد وهو ٤ ملفات فى الساعه ، أي أن :

أ = ٢ سياره كل ساعه

ب = ٤ سيارات يتم خدمتها كل ساعه ، وعلى ذلك ، فإن :

(١) $س = \frac{أ}{ب - أ} = \frac{٢}{٤ - ٢} = ١$ سياره

أي أنه يوجد فى المتوسط ١ عميل فى النظام .

(٢) $ص = \frac{١}{ب - أ} = \frac{١}{٤ - ٢} = \frac{١}{٢}$ ساعه فى المتوسط

(٣) $س_و = \frac{أ^٢}{ب (ب - أ)} = \frac{٢^٢}{٤ (٤ - ٢)} = \frac{١}{٢}$ سياره

بمعنى أنه يوجد $\frac{١}{٢}$ سياره تنتظر فى الصف للحصول على الخدمه .

(٤) $ص_و = \frac{أ}{ب (ب - أ)} = \frac{٢}{٤ (٤ - ٢)} = \frac{٢}{٨}$ ساعه = ١٥ دقيقه

بمعنى أن كل سياره سوف تقضى فى المتوسط ، ١٥ دقيقه فى صف الإنتظار

(٥) $خ = \frac{أ}{ب} = \frac{٢}{٤} = \frac{١}{٢} = ٠,٥٠$ إحتمال أن يكون العامل مشغول

(٦) $ل_{صفر} = ١ - \frac{أ}{ب} = ١ - \frac{١}{٢} = \frac{١}{٢} = ٠,٥٠$

بمعنى أن إحتمال عدم وجود أي سياره فى النظام = ٠,٥٠

(٧) ل (ن > ك) : إحتمال أن يكون عدد العملاء فى الصف أكبر من ك ، يُحسب كالآتى :

ك	ل(ن > ك) = $\left(\frac{أ}{ب}\right)^{ك+1}$
صفر	٠,٥٠٠
١	٠,٢٥٠
٢	٠,١٢٥
٣	٠,٠٦٢
٤	٠,٠٣١
٥	٠,٠١٦
٦	٠,٠٠٨
٧	٠,٠٠٤

يتضح مما سبق أن سرعة الميكانيكى الجديد سوف تؤدى إلى إختصار طول صف الإنتظار ، وأوقات الإنتظار ، وعلى سبيل المثال ، فإن العميل سوف يقضى الآن (نصف ساعه) فى المتوسط فى النظام ، ويقضى (ربع ساعه) فى الصف ، وذلك مقابل قضاء ساعه فى النظام ، (وثلثي ساعه) فى صف الإنتظار فى ظل إستخدام الميكانيكى الحالى .

ومن ثم ، فإن الساعات الكليه التى يقضيها العملاء فى الإنتظار فى حالة وجود الميكانيكى الجديد فى الخدمه =

= (١٦ سياره فى اليوم) × (٠,٢٥ ساعه / سياره) = ٤ ساعات

وتكون :

* تكلفة إنتظار العميل = ١٠جنيه فى الساعه×٤ ساعات = ٤٠ جنيه فى اليوم

** تكلفه إستخدام العامل الجديد = ٨ ساعات فى اليوم × ٤ جنيه للساعه

= ٣٢ جنيه فى اليوم .

ومن ثم فإن : التكاليف الكليه = ٤٠ + ٣٢ = ٧٢ جنيه فى اليوم

ث أن التكلفه الكليه المتوقعه فى اليوم فى ظل استخدام العامل القديم =
١ جنيه ، فإن القرار السليم هو استئجار ذلك الميكانيكى الجديد ، وبذلك
ض التكاليف بمقدار = ١٣٠ - ٧٢ = ٥٨ جنيه فى اليوم ٠

ـ (٣)

تعمل الوحده العلاجيه بإحدى الشركات لمدة ٢٤ ساعه يومياً ، ويصل
المترددين عشوائياً بمعدل (٤) فى الساعه ، وتســـتطيع الوحده خدمة
) منهم فى الساعه فى المتوسط ٠ فإذا علمت أن تكلفة وقت المترددين
الساعه ٥ جنيه

طلوب :

إيجاد متوسط عدد المترددين فى خط الإنتظار فى النظام ؟
إيجاد متوسط عدد المترددين فى خط الإنتظار قبل بدء الخدمه ؟
إيجاد متوسط وقت إنتظار المتردد شاملاً وقت الخدمه ؟
إيجاد متوسط وقت إنتظار المتردد قبل بدء الخدمه ؟
إيجاد متوسط وقت المترددين الضائع فى الإنتظار يومياً قبل بدء الخدمه ؟
التكلفه اليوميه للإنتظار ؟
ما تأثير زيادة معدل الخدمه إلى (٦) بدلاً من (٥) ؟

ـل :

- أ = ٤
- ب = ٥

) متوسط عدد المترددين فى خط الإنتظار فى النظام =

$$س = \frac{أ}{ب - أ} = \frac{٤}{٥ - ٤} = ٤ \text{ عامل}$$

(٢) متوسط عدد المترددين فى خط الإنتظار قبل بدء الخدمه =

$$س_و = \frac{أ^٢}{ب(ب-أ)} = \frac{٤^٢}{٥(٥-٤)} = \frac{١٦}{٥} = ٣,٢ \text{ عامل}$$

(٣) متوسط وقت إنتظار المتردد شاملاً وقت الخدمه = ص :

$$ص = \frac{١}{ب-أ} = \frac{١}{٥-٤} = ١ \text{ ساعه فى المتوسط}$$

(٤) متوسط وقت إنتظار المتردد قبل بدء الخدمه = $ص_و$:

$$ص_و = \frac{أ}{ب(ب-أ)} = \frac{٤}{٥(٥-٤)} = \frac{٤}{٥} \text{ ساعه } = ٠,٨ \text{ دقيقه}$$

بمعنى أن كل سياره سوف تقضى فى المتوسط ، ٤٨ دقيقه فى صف الإنتظار

(٥) متوسط وقت المترددين الضائع فى الإنتظار يومياً قبل بدء الخدمه =

= أ × عدد ساعات العمل × $ص_و$

= ٤ × ٢٤ × ٠,٨ = ٧٦,٨ ساعه .

(٦) التكلفه اليوميه للإنتظار = ٧٦,٨ × ٥ = ٣٨٤ جنيه .

(٧) تأثير زيادة معدل الخدمه إلى (٦) بدلاً من (٥) :

إذا عدلت المنشأة معدل أداء الخدمه وأصبح (٦) متردد فى الساعه بدلاً من (٥) مترددين ، يكون :

أ = ٤ ، ب = ٦

$$ص_و = \frac{أ}{ب(ب-أ)}$$

$$= \frac{٤}{٦(٦-٤)} = \frac{٤}{١٢} \text{ ساعه } = \frac{١}{٣} \text{ ساعة}$$

ـنى أن كل سياره سوف تقضى فى المتوسط ، ٢٠ دقيقه فى صف الإنتظار
ـسط وقت المترددين الضائع فى الإنتظار= أ × عدد ساعات العمل × ص و

$= ٤ \times ٢٤ \times \frac{١}{٣} = ٣٢$ ساعه ٠

ـلفه الكليه للإنتظار = ٣٢ × ٥ = ١٦٠ جنيه

ـى ذلك ننصح الشركه بالتعديل لأنه أقل تكلفه ويحقق وفراً قدره :

= ٣٨٤-١٦٠ = ٢٢٤ جنيه

ـل (٤)

ـد فى أحد المخازن (٦) عمال ، وطاقة هؤلاء العمال هو تحميل ٣ ـات فى الساعه ، وأن العربات تصل بمعدل عربتين فى الساعه ، وقد قدم مدير الشركه إقتراح بزيادة عدد عمال الشحن والتفريغ ٠ وكانت ـتراحات هى زيادة عدد العمال إلى (٨ أو ١٠ أو ١٢) عامل ، فإذا علمت أجر العامل الواحد فى الساعه = ٠,٥ جنيه ، وأن مدة العمل = ٨ ساعات ـاليف إنتظار العربه بدون تحميل = ٢ جنيه فى الساعه ٠

ـطلوب : تحديد أفضل حجم للعماله فى هذا المخزن ؟٠

ـل :

ـائل المتاحه هى ٤ بدائل على النحو التالى :

ـدد العمال	معدل الوصول (أ)	معدل الخدمه (ب)	البدائل
٦	٢	٣	الأول (الحالى)
٨	٢	٤	الثانى
١٠	٢	٥	الثالث
١٢	٢	٦	الرابع

ـوف نتناول كل بديل على النحو التالى :

☒ البديل الأول :

وقت إنتظار الوحده فى اليوم = ص :

ص = $\frac{١}{ب - أ}$ = $\frac{١}{٣ - ٢}$ = ١ ساعه فى المتوسط

إجمالى وقت الإنتظار لجميع الوحدات = أ × عدد الساعات × ص

= ٢ × ٨ × ١ = ١٦ ساعه

تكلفة الإنتظار = إجمالى وقت الإنتظار × تكلفة إنتظار الوحده

= ١٦ × ٢ = ٣٢ جنيه .

تكلفة الخدمه = عدد العمال × ساعات العمل × أجر العامل فى الساعه

= ٦ × ٨ × ٠,٥ = ٢٤ جنيه .

التكلفه الكليه = تكلفة الإنتظار + تكلفة الخدمه = ٣٢ + ٢٤ = ٥٦ جنيه .

☒ البديل الثاني :

وقت إنتظار الوحده فى اليوم = ص =

ص = $\frac{١}{ب - أ}$ = $\frac{١}{٤ - ٢}$ = ٠,٥ ساعه فى المتوسط

إجمالى وقت الإنتظار لجميع الوحدات = أ × عدد الساعات × ص

= ٢ × ٨ × ٠,٥ = ٨ ساعات .

تكلفة الإنتظار = إجمالى وقت الإنتظار × تكلفة إنتظار الوحده

= ٨ × ٢ = ١٦ جنيه .

تكلفة الخدمه = عدد العمال × ساعات العمل × أجر العامل فى الساعه

= ٨ × ٨ × ٠,٥ = ٣٢ جنيه .

التكلفه الكليه = تكلفة الإنتظار + تكلفة الخدمه = ١٦ + ٣٢ = ٤٨ جنيه .

☒ البديل الثالث :

وقت إنتظار الوحده فى اليوم = ص =

ص = $\frac{١}{ب - أ}$ = $\frac{١}{٥ - ٢}$ = $\frac{١}{٣}$ ساعه فى المتوسط

إجمالى وقت الإنتظار لجميع الوحدات = أ × عدد الساعات × ص

إجمالى وقت الإنتظار لجميع الوحدات = ٢ × ٨ × $\frac{١}{٣}$ = ٥,٣٣ ساعه

- تكلفة الإنتظار = ٥,٣٣ × ٢ = ١٠,٧ جنيه ٠
- تكلفة الخدمه = ١٠ × ٨ × ٠,٥ = ٤٠ جنيه ٠
- التكلفه الكليه = ١٠,٧ + ٤٠ = ٥٠,٧ جنيه ٠

☒ البديل الرابع :

وقت إنتظار الوحده فى اليوم = ص =

ص = $\frac{١}{ب - أ}$ = $\frac{١}{٦ - ٢}$ = $\frac{١}{٤}$ ساعه فى المتوسط

إجمالى وقت الإنتظار لجميع الوحدات = أ × عدد الساعات × ص

= ٢ × ٨ × ٠,٢٥ = ٤ ساعات ٠

☒ تكلفة الإنتظار = ٤ × ٢ = ٨ جنيه ٠

☒ تكلفة الخدمه = ١٢ × ٨ × ٠,٥ = ٤٨ جنيه ٠

☒ التكلفه الكليه = ٨ + ٤٨ = ٥٦ جنيه ٠

وعلى ذلك يكون :

البديل	الأول	الثانى	الثالث	الرابع
التكلفه الكليه	٥٦	٤٨	٥٠,٧	٥٦

ويتضح من ذلك أن : أقل البدائل تكلفه ، هو البديل الثانى ، ومن ثم يكون العدد الأمثل للعمال بالمخزن هو (٨) عمال ٠

مثال (٥)

إحسب كل من :

١- عدد المنتظرين فى إنتظار الحصول على الخدمه ؟

٢- عدد المنتظرين فى إنتظار الحصول على الخدمه شاملاً الوحده التى تخدم

٣- متوسط وقت الإنتظار للوحده طالبة الخدمه شاملاً وقت الخدمه ؟

٤- متوسط وقت الإنتظار للوحده طالبة الخدمه بدون خدمه ؟

وذلك فى الحالتين الآتيتين : -

الحاله الأولى :

تصل البواخر بميناء بورسعيد بمعدل (٩) بواخر فى الأسبوع فى المتوسط ، بينما يستطيع الميناء أن يستقبل البواخر بمعدل (١٢) باخره فى الأسبوع فى المتوسط.

الحاله الثانيه :

متوسط عدد الذين يستخدمون التليفون فى الساعه (١٢) شخص ، بينما متوسط طول المكالمه التليفونيه (٣) دقائق .

الحــل :

للحصول على المطلوبات السابقه لابد من تحديد (أ ، ب) لكل حاله من الحالتين السابقتين ، مع العلم بأن :

أ = معدل الوصول للوحدات طالبة الخدمه .

ب = معدل الخدمه للوحدات طالبة الخدمه .

** الحاله الأولى :

أ = ٩ فى الأسبوع ب = ١٢ فى الأسبوع

١- عدد المنتظرين فى إنتظار الحصول على الخدمه فى الصف = $س_و$

$$س_و = \frac{أ^٢}{ب (ب - أ)} = \frac{٩^٢}{١٢ (١٢ - ٩)} = \frac{٨١}{٣٦} = ٢,٥٢ \text{ وحدة}$$

٢- عدد المنتظرين فى إنتظار الحصول على الخدمه شاملاً الوحده التى تخدم

$$= س = \frac{أ}{ب - أ} = \frac{٩}{١٢ - ٩} = ٣ \text{ وحدات فى الأسبوع}$$

٣- متوسط وقت الإنتظار للوحده طالبة الخدمه شاملاً وقت الخدمه = ص =

$$ص = \frac{١}{ب - أ} = \frac{١}{١٢ - ٩} = \frac{١}{٣} \text{ أسبوع فى المتوسط}$$

٤- متوسط وقت الإنتظار للوحده طالبة الخدمه بدون خدمه = $ص_و$

$$ص_و = \frac{أ}{ب (ب - أ)} = \frac{٩}{١٢ (١٢ - ٩)} = \frac{١}{٤} \text{ أسبوع}$$

وعلى الطالب محاولة إيجاد المطاليب السابقه فى ضوء الحاله الثانيه ٠

مثال (٦)

فى أحد المصانع يوجد مخزن لعدد يخدم العمال ، ويصل هؤلاء العمال إلى المخزن بطريقه عشوائيه بمعدل (١٨) عامل فى الساعه فى المتوسط ، وتؤدى الخدمه بواسطة موظف واحد فى المخزن بمعدل (٢٠) عامل فى الساعه فى المتوسط ، ويتقاضى العامل (٥ جنيه) فى الساعه ، كما يتقاضى موظف المخزن (٥ جنيه) فى الساعه ٠

المطلوب :

ما هو العدد الأمثل من الموظفين الذين يجب أن يعملوا فى المخزن إذا كان عدد ساعات العمل (٨ ساعات) يومياً ؟ ٠

الحــل :

نقوم بتقييم الوضع الحالى (وجود موظف واحد بالمخزن) ، ثم نقوم بتقييم حالة وجود إثنين من الموظفين فى المخزن ، وبالمقارنه نحدد البديل الأفضل وهو الأقل تكلفه ، وذلك باستخدام أسلوب صفوف الإنتظار على النحو التالى :

التكلفه الكليه = تكلفة الخدمه + تكلفة الإنتظار

- تكلفة الخدمه = عدد الموظفين × أجر الموظف فى اليوم
- تكلفة الإنتظار = أ × عدد ساعات العمل × ص × أجر العامل فى الساعه

أولاً : <u>حالة وجود موظف واحد بالمخزن</u> :

أ = ١٨ ، ب = ٢٠

- تكلفة الخدمه = ١ × ٥ × ٨ = ٤٠ جنيه يومياً .
- تكلفة الإنتظار = $١٨ \times ٨ \times \frac{١}{٢٠ - ١٨} \times ٥$

= ١٤٤ × ٠,٥ × ٥ = ٣٦٠ جنيه

التكلفه الكليه = ٤٠ + ٣٦٠ = <u>٤٠٠ جنيه</u> .

ثانياً : <u>حالة تعيين إثنين من الموظفين بالمخزن</u> :

أ = ١٨ ، ب = ٤٠

- تكلفة الخدمه = ٢ × ٥ × ٨ = ٨٠ جنيه يومياً .
- تكلفة الإنتظار = $١٨ \times ٨ \times \frac{١}{٤٠ - ١٨} \times ٥$

= $١٤٤ \times \frac{١}{٢٢} \times ٥$ = ٣٢,٥ جنيه

التكلفه الكليه = ٨٠ + ٣٢,٥ = <u>١١٢,٥ جنيه</u> .

ثالثاً : حالة تعيين ثلاثه من الموظفين بالمخزن :

أ = ١٨ ، ب = ٦٠

- تكلفة الخدمه = ٣ × ٥ × ٨ = ١٢٠جنيه يومياً ،
- تكلفة الإنتظار = ١٨ × ٨ × $\frac{١}{٦٠-١٨}$ × ٥

= ١٤٤ × $\frac{١}{٤٢}$ × ٥ = ١٧,٥ جنيه

التكلفه الكليه = ١٢٠ + ١٧,٥ = ١٣٧,٥ جنيه ،

ومن هذه البدائل نجد أن أفضلها هو البديل الثانى حيث يحقق أقل تكلفه وهى ١١٢,٥ جنيه

مثال (٧)

فى إحدى محطات البنزين كان متوسط عدد السيارات الوارده إلى المحطه لشراء البنزين يبلغ (١٤) سياره فى الساعه ، وكل سياره تقضى (٢) دقيقه فى الخدمه .

والمطلوب حساب ما يلى :

١- متوسط عدد السيارات بالمحطه بما فى ذلك السياره محل الخدمه

٢- متوسط فترة الإنتظار للسياره ؟

٣- متوسط عدد السيارات فى المحطه شاملاً السياره التى تُخدم ؟

٤- متوسط فترة الإنتظار للسياره حتى تخرج من المحطه ؟ .

الحـــل :

أ = ١٨ سياره / ساعه ، ب = ٣٠ سياره / ساعه

(١) متوسط عدد السيارات بالمحطه بما فى ذلك السياره محل الخدمه= س :

$$س = \frac{أ}{ب - أ} = \frac{١٨}{٣٠ - ١٨} = ١,٥ \text{ سياره}$$

(٢) متوسط فترة الإنتظار للسياره فى الصف $ص_و$:

$$ص_و = \frac{أ}{ب(ب - أ)} = \frac{١٨}{٣٠(٣٠ - ١٨)} = \frac{١٨}{٣٦٠} = ٠,٠٥ \text{ ساعه}$$

(٣) متوسط عدد السيارات فى المحطه شاملاً السياره التى تُخدم :

$$س_و = \frac{أ^٢}{ب(ب - أ)} = \frac{١٨^٢}{٣٠(٣٠ - ١٨)} = \frac{٣٢٤}{٣٦٠} = ٠,٩ \text{ سياره}$$

(٤) متوسط فترة الإنتظار للسياره حتى تخرج من المحطه = ص :

$$ص = \frac{١}{ب - أ} = \frac{١}{٣٠ - ١٨} = \frac{١}{١٢} \text{ ساعه فى المتوسط}$$

مثال (٨)

تستطيع شركة الكهرباء أن تستقبل شكاوى إنقطاع التيار الكهربى عن العملاء بمعدل (٢) شكوى فى الساعه ، وتملك الشركه سيارة إصلاح تستطيع خدمة (٣) طلبات فى الساعه ، والمطلوب إيجاد كل من :

$س$ ، $س_و$ ، $ص$ ، $ص_و$

الحــل :

أ = ٢ ساعه ، ب = ٣ ساعه

(١) $س = \frac{أ}{ب - أ} = \frac{٢}{٣ - ٢} = ٢$ عميل

أي أنه يوجد فى المتوسط ٢ عميل فى النظام ٠

(٢) $س_و = \frac{أ^٢}{ب (ب - أ)} = \frac{٢^٢}{٣ (٣ - ٢)} =$ ١,٣٣ عميل

بمعنى أنه يوجد ١,٣٣ عميل ينتظر فى الصف للحصول على الخدمه .

(٣) $ص = \frac{١}{ب - أ} = \frac{١}{٣ - ٢} =$ ١ ساعه

أي أن كل عميل يقضى ، فى المتوسط ساعه فى النظام .

(٤) $ص_و = \frac{أ}{ب (ب - أ)} = \frac{٢}{٣ (٣ - ٢)} = \frac{٢}{٣}$ ساعه = ٤٠ دقيقه

بمعنى أن كل سياره سوف تقضى فى المتوسط ، ٤٠ دقيقه فى صف الإنتظار

مثال (٩)

وجد صاحب متجر أن العملاء يستعملون التليفون بالمحل كل (٥) دقائق ، وأن طول المكالمه التليفونيه (٤) دقائق .

والمطلوب حساب كل من : س ، $س_و$ ، ص ، $ص_و$

الحـــل :

أ = $\frac{٦٠}{٥} =$ ١٢ وحده /ساعه ، ب = $\frac{٦٠}{٤} =$ ١٥ وحده / ساعه

(١) $س = \frac{أ}{ب - أ} = \frac{١٢}{١٥ - ١٢} =$ ٤ وحدات

(٢) $س_و = \frac{أ^٢}{ب (ب - أ)} = \frac{١٢^٢}{١٥ (١٥ - ١٢)} = \frac{١٤٤}{٤٥} =$ ٣,٢ وحدة

(٣) $ص = \frac{١}{ب - أ} = \frac{١}{١٥ - ١٢} = \frac{١}{٣}$ ساعه في المتوسط

(٤) $ص_و = \frac{أ}{ب (ب - أ)} = \frac{١٢}{١٥ (١٥ - ١٢)} = \frac{١٢}{٤٥}$ ساعه

مثال (١٠)

يقوم مصنع للألبان بتوزيع منتجاته باستخدام سيارات نقل محمله طبقاً للحموله الكامله . ولدى الشركه سيارات نقل خاصه بها بالإضافه إلى سيارات نقل أخرى ، وهناك شكوى من هذه الشركه الخاصه تتعلق بأن سياراتها يجب أن تنتظر فى صفوف ، وبالتالى تفقد الشركه أموالها التى تدفعها عن السياره وعن السائق الذى ينتظر فقط ، وقد إقترحت هذه الشركه الخاصه على إدارة مصنع الألبان الإقتراحين التاليين :

- إما النقل فى خط سير ثانى بحمولة نقل ثانيه .
- أو تخفيض الأسعار حسب وقت الإنتظار .

وقد توافرت البيانات التاليه :

- متوسط معدل الوصول (لكل سيارات النقل) = ٣ / ساعه .
- متوسط معدل الخدمه = ٤ / ساعه .
- توفر شركة النقل الخاصه ٤٠٪ من إجمالى عدد سيارات النقل .

وبفرض أن هذه المعدلات عشوائيه طبقاً لتوزيع بواسون ، والمطلوب تحديد ما يلى:

١- إحتمال إنتظار سيارات النقل ؟.

٢- وقت الإنتظار لسيارات النقل المنتظره ؟.

٣- وقت الإنتظار المتوقع لسيارات نقل الشركه الخاصه فى اليوم ؟.

الحــل :

- متوسط معدل الوصول (أ) = ٣
- متوسط وقت الوصول = $\frac{٦٠}{٣}$ = ٢٠ دقيقه
- معدل أداء الخدمه (ب) = ٤

- متوسط وقت أداء الخدمه $= \frac{٦٠}{٤} =$ ١٥ دقيقه

١- إحتمال إنتظار سيارات النقل من أجل الخدمه $= \frac{أ}{ب} = \frac{٣}{٤} =$ ٠,٧٥

٢- متوسط وقت الإنتظار لسيارات النقل المنتظره =

$$ص_و = \frac{أ}{ب(ب - أ)} = \frac{٣}{٤(٤ - ٣)} = \frac{٣}{٤} \text{ ساعه}$$

٣- إجمالى وقت الإنتظار المتوقع لسيارات نقل الشركه الخاصه فى اليوم

= عدد السيارات فى اليوم × النسبه المئويه لسيارات نقل الشركه

× متوسط وقت الإنتظار لكل سياره فى صف الإنتظار

= أ × ٨ × النسبه المئويه × $ص_و$

$= ٣ \times ٨ \times ٠,٤٠ \times \frac{٣}{٤}$

= ٢٤ × ٠,٤٠ × ٠,٧٥ = ٧,٢ ساعه ٠

مثال (١١)

إفتتح بنك القاهره فرع جديد فى مدينة ٦ أكتوبر ، وبناءاً على البحوث التمهيديه التى قام بها البنك ، توصل إلى أن معدل وصول العملاء ممكن أن يقترب من توزيع بواسون ، وذلك بمتوسط معدل وصول = ١٠ عملاء / ساعه ، وقد خطط البنك لإستخدام خزينه واحده ٠ وقد قدر أن هذه الخزينه يمكن أن تخدم فى المتوسط ١٢ عميل / ساعه ، وبفرض أن توزيع معدل الخدمه يتبع أيضاً توزيع بواسون (أي أن توزيع وقت الخدمه يُعتبر توزيع أسى) ٠

المطلوب :

١- تحديد متوسط عدد طالبى الخدمه (العملاء) فى النظام ؟٠

٢- تحديد متوسط الوقت الذى يقضيه العميل فى النظام ؟٠

٣- تحديد متوسط عدد طالبى الخدمه فى الصف ؟٠

٤- تحديد متوسط وقت الإنتظار فى الصف ؟٠

٥- إحتمال أن تكون الخزينه مشغوله ، (معامل الإستخدام فى النظام) ؟٠

٦- إحتمال عدم وجود عملاء بالنظام ؟٠

٧- إحتمال وجود ٣ عملاء بالنظام ؟٠

٨- إحتمال أن يكون عدد العملاء فى الصف أكبر من ٤ عملاء ؟٠

الحــل :

- متوسط معدل الوصول (أ) = ١٠ عملاء / ساعه
- متوسط وقت الوصول = $\frac{٦٠}{١٠}$ = ٦ دقائق
- معدل أداء الخدمه (ب) = ١٢ عميل
- متوسط وقت أداء الخدمه = $\frac{٦٠}{١٢}$ = ٥ دقائق

وبناءاً على ذلك :

١- متوسط عدد طالبى الخدمه (العملاء) فى النظام = س :

$$\text{س} = \frac{\text{أ}}{\text{ب} - \text{أ}} = \frac{١٠}{١٢-١٠} = ٥ \text{ عملاء}$$

أي أنه يوجد فى المتوسط ٥ عملاء فى النظام ٠

٢- متوسط الوقت الذى يقضيه العميل فى النظام = ص :

$$ص = \frac{١}{ب - أ} = \frac{١}{١٢ - ١٠} = ٠,٥ \text{ ساعه}$$

٣- متوسط عدد طالبى الخدمه فى الصف = $س_و$

$$س_و = \frac{أ^٢}{ب (ب - أ)} = \frac{١٠^٢}{١٢ (١٢ - ١٠)} = ٤,١٧ \text{ عميل}$$

٤- متوسط وقت الإنتظار فى الصف = $ص_و$

$$ص_و = \frac{أ}{ب (ب - أ)} = \frac{١٠}{١٢ (١٢ - ١٠)} = \frac{١٠}{٢٤} \text{ ساعه} = ٢٥ \text{ دقيقه}$$

٥- إحتمال أن تكون الخزينه مشغوله ، (معامل الإستخدام فى النظام) =

$$خ = \frac{أ}{ب} = \frac{١٠}{١٢} = ٠,٨٣٣$$

(٦) $ل_{صفر} = ١ - \frac{أ}{ب} = ١ - \frac{١٠}{١٢} = ٠,١٦٦٧$

(٧) إحتمال وجود ٣ عملاء فى النظام =

$$ل_٣ = \left(١ - \frac{١٠}{١٢}\right) \times \left(\frac{١٠}{١٢}\right)^٣$$

$$= \frac{٢}{١٢} \times \frac{١٠٠٠}{١٧٢٨} = \frac{٢٠٠٠}{٢٠٧٣٦} = ٠,٠٩٦٤٥١$$

(٨) إحتمال أن يكون عدد العملاء فى الصف أكبر من ٤ عملاء =

$$ل(ن \succ ٤) = \left(\frac{١٠}{١٢}\right)^{٤+١} = ل(ن \succ ٤) = \left(\frac{١٠}{١٢}\right)^٥$$

$$= \frac{١٠٠٠٠٠}{٢٤٨٨٣٢} = ٠,٤٠١٨٧٨$$

تمارين على نظرية صفوف الإنتظار

(١) آلة لتصوير الوثائق يصل إليها العميل بمعدل ١٥ عميل في الساعة ، وتُقدم الخدمة لهم بواقع ٣ دقائق للعميل الواحد ، فإذا كان معدل الوصول يتبع التوزيع البواسوني ، ومعدل الخدمة يتبع التوزيع الأسي ، وأسلوب الخدمة هو من يأتي أولاً يُخدم أولاً .

والمطلوب إيجاد :

١- معدل استخدام النظام (كثافة التشغيل) - إحتمال انتظار عميل واحد في صف الإنتظار ؟.
٢- إحتمال عدم وجود عميل بالنظام ؟.
٣- إحتمال وجود ٣ عملاء بالنظام ؟.
٤- إحتمال وجود أكثر من ٣ عملاء بالنظام ؟.
٥- متوسط عدد العملاء فى النظام ؟.
٦- متوسط عدد العملاء فى صف الإنتظار ؟.
٧- متوسط الوقت الذى يقضيه العميل فى النظام ؟.
٨- متوسط الوقت الذى يقضيه العميل فى الصف ؟.

ويعمل على الآلة عامل واحد يتقاضى ٣ جنيهات في الساعة ، وعدد ساعات العمل اليومية ١٢ ساعة ، وساعة الإنتظار تكلف المنشأة ٤ جنيهات ، والمطلوب إيجاد التكلفة الكلية ؟

(٢) مضرب أرز يصل إليه العميل بمعدل ٢٠ عميل في الساعة ، وتُقدم لهم الخدمة بواقع ٢٥ عميل في الساعة ، فإذا كانت تكلفة الإنتظار في الدقيقة الواحدة ٤٠ جنيه (على مدار الموسم) ، وأن تكلفة تعيين موظف جديد هي ١٧٥ جنيه خلال الموسم ، إلا أن معدل الخدمة سيرتفع إلى ٣٠ عميل في الساعة ، فهل توافق على قرار الإدارة بتعيين موظف جديد ؟

(٣) تصل البواخر تصل إلى ميناء السويس بمعدل (١٢) باخرة فى اليوم فى المتوسط ، وتجري عملية الخدمة (تحميل وتنزيل) بمعدل (١٨) باخره فى اليوم ، أجب عن الآتي :

١- ما احتمال أن تصل إلى الميناء باخرة جديدة وتقف في خط الإنتظار ؟
٢- ما احتمال أن لا يكون أي باخرة في النظام ؟
٣- ما متوسط عدد البواخر فى خط الإنتظار ؟
٤- ما متوسط الوقت الذي تمضيه الباخرة فى خط الإنتظار من أجل عملية التحميل أو التفريغ ؟.
٥- ما احتمال أن يكون في النظام ٣ بواخر ؟
٦- إذا كانت تكلفة الإنتظار في الدقيقة الواحدة هي ٢٥ جنيه ، واقترحت عليك إدارة الميناء دعم طاقة مركز الخدمة ليصبح معدل الخدمة في اليوم ٢٠ باخرة وبتكلفة قدرها ٢٠٠٠ جنيه ، فهل توافق على هذا الإقتراح؟

(٤) في إحدى محطات خدمة السيارات على الطرق السريعة كان معدل وصول السيارات هو (٤٠) سيارة فى الساعة ، بينما كان معدل تزويد السيارات بالوقود هو (١,٢٥) دقيقة فى المتوسط ، إحسب كل من :

(١) متوسط عدد السيارات فى النظام ؟
(٢) متوسط عدد السيارات فى الصف ؟
(٣) متوسط الوقت الذي يقضيه العميل فى النظام ؟.
(٤) متوسط الوقت الذي يقضيه العميل فى الصف ؟.
(٥) إحتمال أن تكون المحطة في حالة تشغيل ؟.
(٦) إحتمال أن تكون المحطة عاطلة ؟.
(٧) إحتمال أن يزيد عدد السيارات فى المحطة عن (٤) ؟.

(٥) شركة الحديد والصلب لديها وحده لعلاج العاملين بها ، وقد توصلت الشركه من واقع خبرتها أن وصول العاملين للعلاج يتبع توزيع بواسون ، ويبلغ متوسط وصول العمال للحصول على الخدمه العلاجيه ٥ عمال / ساعه ، فى حين يبلغ متوسط معدل أداء الخدمه العلاجيه ٦ عمال / ساعه ،المطلوب :

١- تحديد متوسط عدد طالبى الخدمه (العمال المترددين على الوحده العلاجيه) فى النظام ؟٠
٢- تحديد متوسط الوقت الذى يقضيه طالب الخدمه فى النظام ؟٠
٣- تحديد متوسط عدد طالبى الخدمه فى الصف ؟٠
٤- تحديد متوسط وقت الإنتظار فى الصف ؟٠
٥- إحتمال عدم وجود طالبى خدمه بالنظام ؟٠
٦- إحتمال وجود ٣ عمال بالنظام ؟٠

(٦) إذا كان عدد العاملين بقسم التجميع فى إحدى الشركات هو ٥ عمال ، وأن إحتمال غياب عامل واحد منهم يومياً هو ٢٠٪ ، وبفرض أن حجم الإنتاج يتطلب وجود ٥ عمال بقسم التجميع ، فإذا علمت أن معدل الإنتاج هو ٢٠ وحده فى الساعه ، وكذلك معدل التجميع هو ٢٠ وحده فى الساعه ، وقد قُدم لمدير الإنتاج إقتراح بتعيين عامل جديد ٠ المطلوب : تحديد أفضل عدد للعماله علماً بأن أجر العامل فى اليوم (٣,٢) جنيه ، وأن كل وحده غير منتجه تضيع على المشروع ربحاً قدره (٢) جنيه ، وأن عدد ساعات العمل فى اليوم (٨) ساعات ٠

(٧) يوجد فى أحد المصانع الكبرى قسم لإصلاح وصيانة الآلات والماكينات التى تُستخدم فى أقسامه الإنتاجيه ، وترغب إدارة المصنع فى دراسة إقتصاديات العمل فى هذا القسم ، وقد توافر لديها البيانات التاليه :

- تصل الآلات من الأقسام الإنتاجيه بمعدل ٣ آلات فى الساعه ٠

- معدل خدمة الأقسام الإنتاجيه هو ٤ آلات فى الساعه ، أي أن متوسط الوقت اللازم لإتمام خدمة الصيانه للآله هو ١٥ دقيقه .
- يعمل بقسم الصيانه عامل واحد ، ويبلغ مرتبه فى الساعه (٠,٣٠) جنيه ، وكان متوسط أجر العامل فى الإنتاج هو (٠,٦٠) جنيه فى الساعه .

والمطلوب حساب :

(١) متوسط عدد الآلات فى صف الإنتظار ؟.

(٢) متوسط عدد الآلات فى قسم الصيانه ؟.

(٣) متوسط الوقت الذى تنتظره الآله بدون خدمه ؟.

(٤) متوسط الوقت الذى تقضيه الآله بقسم الصيانه ؟.

(٥) مجموع التكاليف الكليه المتعلقه بعملية الصيانه فى اليوم ؟.

(٨) شركة كهرباء تستقبل شكاوى إنقطاع التيار الكهربائى من العملاء بمعدل ٢ شكوى فى الساعه ، وتمتلك الشركه سيارة إصلاح مزوده بجهاز راديو يستطيع خدمة ٣ طلبات فى الساعه فى المتوسط ، والمطلوب حساب :

١- متوسط الوقت الذى يُعاد فيه التيار شاملاً وقت الإصلاح ؟.

٢- متوسط الوقت الذى ينتظره العميل بدون إصلاح ؟.

٣- متوسط عدد المكالمات التى تنتظر الخدمه ؟.

٤- متوسط عدد المكالمات التى تنتظر الخدمه شاملةً المكالمات تحت الخدمه ؟.

(٩) تصل عربات النقل المحمله إلى المخزن لتفريغها بمعدل (١٠) عربات فى الساعه ، ويستطيع عمال التفريغ القيام بتفريغ (١٢) عربه فى الساعه والمطلوب حساب :

١- متوسط عدد العربات فى صف الإنتظار ؟.

٢- متوسط عدد العربات فى النظام ؟.

٣- متوسط الوقت الذى تنتظره العربه بدون تفريغ ؟.

٤- متوسط الوقت الذى تنتظره العربه حتى تعود مره أخرى ليتم تحميلها ؟.

الفصل الثامن

تحليل سلاسل ماركوف

Markov Chains Analysis

يعتبر أسلوب سلاسل ماركوف **Markov Chains** من الأساليب الإحتماليه التى تحدم وتناسب متخذ القرار الذى يواجه مواقف وبدائل مختلفه ، ويكون عليه الإختيار من بينها بما يعظم دالة منفعته. هذا ويسعى أسلوب ماركوف إلى دراسة وتحليل التحركات أو التغيرات الحاليه لمتغير معين كمحاوله للتنبؤ بتحركاته وتغيراته المتوقعه أو المستقبله ويعتمد أسلوب سلاسل ماركوف على أساس أن سلوك أى متغير فى المستقبل يتحدد فى ضوء سلوكه فى الفتره أو فى الفترات السابقه مباشرةً ، أى بمعرفة ودراسة سلوك متغير ما فى الفتره الحاليه فإنه يمكن التنبؤ بسلوك المتغير فى الفتره القادمه

ويرجع هذا الأسلوب إلى عالم الرياضيات الروسى ماركوف فى أوائل القرن العشرين ، وقد إستخدم ماركوف هذا الأسلوب فى وصف حركة جزئيات غاز فى إناء مغلق ثم التنبؤ بهذه الحركه فى المستقبل . ثم إنتقل إستخدام الأسلوب فى مجال بحوث التسويق بهدف التنبؤ بسلوك العملاء ومعرفة درجة ولائهم لمنتج معين أو ماركه معينه فى الأجل القصير أو الأجل الطويل . وعلى ضوء معرفة المنشأه لحصتها المتوقعه فى السوق فى الفتره أو (الفترات) القادمه ، فإنه يمكنها رسم سياستها التسويقيه المناسبه لظروفها .

وإذا كان تطبيق أسلوب ماركوف فى المجالات الإداريه قد إرتبط فى البدايه بمجال رسم السياسات التسويقيه ، فقد ظهرت فى السنوات الأخيره تطبيقات متعدده لأسلوب سلاسل ماركوف فى المجالات المحاسبيه والإداريه منها على سبيل المثال ما يلى :

(١) دراسة فعالية برامج الحملات الإعلانيه ، حيث يُستخدم أسلوب سلاسل ماركوف فى تقويم آثار البرامج الإعلانيه والنتائج المتوقعه لكل برنامج ٠

(٢) التنبؤ بالإحتياجات من القوى العامله فى ضوء معرفة أعداد من يتركون الخدمه بسبب الإستقاله أو الإحاله للمعاش أو بسبب الوفاه ٠

(٣) دراسة جداول تقادم أرصدة حسابات العملاء فى نهاية عدة فترات زمنيه ومدى تحول العملاء من درجه إئتمانيه معينه إلى درجه أخرى ، ومحاولة تقدير مخصص الديون المشكوك فيها ٠

(٤) التنبؤ بنصيب وسائل النقل المختلفه فى نقل سلعه معينه لفتره قادمه ، وذلك فى ضوء التعرف على النقلات التى تقوم بها كل وسيله ، والنقلات التى تحول إليها من وسائل النقل الأخرى ٠

وعلى ذلك ، فإنه يمكن القول بإمكانية الإستفاده من أسلوب ماركوف فى مجالات متعدده ، ولبيان كيفية الإستفاده من هذا الأسلوب سنتناول تطبيق أسلوب ماركوف فى أحد المجالات الإداريه وهى مجال التسويق ورسم السياسات التسويقيه ، ولتوضيح التطبيق العملي لأسلوب ماركوف نفترض المثال التالى :

مثال

بفرض وجود ثلاث شركات تنتج منتجاً واحداً ، ولكن يتم تسويقه تحت مسميات وعلامات تجاريه مختلفه (س ، ص ، ع) ، ومن المعروف أن كل شركه لايثبت عدد عملائها ، فاعملاء ينتقلون من شركه لأخرى مع مرمر الوقت لأسباب كثيره منها الإعلانات وعدم الرضا عن الخدمه المقدمه لهم ، وإختلاف سياسات البيع والتحصيل ، ٠٠٠ الخ٠

وبفرض أن هذه الشركات الثلاث تحتفظ بمعلومات تتعلق بعدد عملائها ، والشركه التي كان يتعامل معها كل عميل جديد ، وبفرض أن عدد العملاء فى السوق ثابت ، أى لم يستجد عملاء خلال الفتره محل الدراسه ، ولم يترك السوق عملاء قدامى ٠

وبفرض أن هذه الشركات الثلاث تمسك سجلات منتظمه ، وأمكن توفير البيانات التحليليه الخاصه بتحركات العملاء بين الشركات الثلاث خلال شهر ، وكانت هذه البيانات عن شهر :

والجدول التالي يلخص التعاملات ٠

الشركه	عدد العملاء فى أول يناير ٢٠٠١	تحركات العملاء						عدد العملاء فى أول فبراير ٢٠٠١
		المكسب			الخساره			
		من س	من ص	من ع	إلى س	إلى ص	إلى ع	
س	٢٠٠	صفر	٣٥	٢٥	صفر	٢٠	٢٠	٢٢٠
ص	٥٠٠	٢٠	صفر	٢٠	٣٥	صفر	١٥	٤٩٠
ع	٣٠٠	٢٠	١٥	صفر	٢٥	٢٠	صفر	٢٩٠
المجموع	١٠٠٠	٤٠	٥٠	٤٥	٦٠	٤٠	٣٥	١٠٠٠

وعلى ضوء بيانات الجدول السابق ، يمكن حساب إحتمالات إحتفاظ كل شركه بعملائها ، إحتمالات فقدانها لجزء من عملائها للشركات الأخرى ، وذلك بقسمة عدد العملاء الذين تحتفظ بهم الشركه وعدد العملاء الذين ستخسرهم على العدد الإجمالى لعملائها الأصليين (الذين كانوا لديها فى بداية الفتره) وذلك من خلال الجدول التالى :

الشركة / الإحتمال	س	ص	ع
الإحتفاظ	(٢٠٠−٤٠) / ٢٠٠ = ٠,٨	(٥٠٠−٥٠) / ٥٠٠ = ٠,٩	(٣٠٠−٤٥) / ٣٠٠ = ٠,٨٥
فقد العملاء للشركة (س)	صفر	٣٥ / ٥٠٠ = ٠,٠٧	٢٥ / ٣٠٠ = ٠,٨٣
فقد العملاء للشركة (ص)	٢٠ / ٢٠٠ = ٠,١	صفر	٢٠ / ٣٠٠ = ٠,٠٦٧
فقد العملاء للشركة (ع)	٢٠ / ٢٠٠ = ٠,١	١٥ / ٥٠٠ = ٠,٠٣	صفر
مجموع الإحتمالات	١,٠٠	١,٠٠	١,٠٠

وعلى ذلك ، تكون مصفوفة التحركات الإحتماليه (مصفوفة إحتمالات الإنتقال) على النحو التالى :

خسارة ↓ / مكسب ←	س	ص	ع
س	٠,٨	٠,٠٧	٠,٠٨٣
ص	٠,١	٠,٩	٠,٠٦٧
ع	٠,١	٠,٠٣	٠,٨٥٠

حيث أن الصف يمثل الإحتفاظ والمكسب ، والعمود يمثل الإحتفاظ والخساره ، فالعمود الأول يبين أن الشركه (س) تحتفظ بـــ ٨٠٪ من عملائها وأنها تخسر ١٠٪ من عملائها للشركه (ص) وتخسر أيضاً ١٠٪ للشركه (ع) ، والصف الأول يبين أن الشركه (س) ستحتفظ بـــ ٨٠٪ من

عملائها ، وتكسب ٧٪ من عملاء الشركه (ص) ، وتكسب أيضاً ٨,٣٪ من عملاء الشركه (ع) ، وهكذا .

وبنظره فاحصه لمصفوفة التحركات الإحتماليه يمكن ملاحظة الآتى :

* أنها مصفوفه مربعه (عدد الاصفوف = عدد الأعمده)

* جميع عناصرها موجبه .

* قطرها يمثل إحتمالات الإحتفاظ بالعملاء.

* مجموع عناصر كل عمود تساوى الواحد الصحيح ، حيث أن كل عمود يمثل إحتمالات تحركات عملاء كل شركه .

التنبؤ بحصص السوق المتوقعه لفترات قادمه : -

على ضوء مصفوفة التحركات الإحتماليه ، وبمعرفة الحصص الحاليه للشركات يمكن التنبؤ بالحصص المتوقعه لكل شركه فى الفتره القادمه (أي شهر) وفقاً للعلاقه التاليه :

حصص السوق فى الفتره القادمه = مصفوفة التحركات الإحتماليه خلال الفتره الحاليه × حصص الشركات فى الفتره الحاليه

وبفرض أن التحركات الإحتماليه فى هذا المثال ستظل ثابته ، وأن حصص الشركات فى أول ديسمبر ٢٠٠٠ وفقاً للبيانات السابقه كانت كما يلى : -

حصة (س) = $\frac{٢٢٠}{١٠٠٠}$ = ٢٢ ٪

حصة (ص) = $\frac{٤٩٠}{١٠٠٠}$ = ٤٩ ٪

حصة (ع) = $\frac{٢٩٠}{١٠٠٠}$ = ٢٩ ٪

∴ حصص الشركات فى السوق خلال الشهر القادم (الفتره القادمه) ، أي فى أول يناير ٢٠٠١ على النحو التالى :

$$\therefore \text{الحصص المتوقعة} = \begin{pmatrix} ٠,٨ & ٠,٠٧ & ٠,٠٨٣ \\ ٠,١ & ٠,٩ & ٠,٦٧ \\ ٠,١ & ٠,٠٣ & ٠,٨٥ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ٠,٢٢ \\ ٠,٤٩ \\ ٠,٢٩ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٠,٢٣٤ \\ ٠,٤٨٢ \\ ٠,٢٨٤ \end{pmatrix}$$

حيث أنه من خلال ضرب المصفوفات السابق دراستها نجد أن :

نصيب س = (٠,٢٢×٠,٨)+(٠,٤٩×٠,٠٧)+(٠,٢٩×٠,٠٨٣) = ٠,٢٣٤

نصيب ص = (٠,٢٢×٠,١)+(٠,٤٩×٠,٩٠)+(٠,٢٩×٠,٠٦٧)= ٠,٤٨٢

نصيب ع = (٠,٢٢×٠,١)+(٠,٤٩×٠,٠٣)+(٠,٢٩×٠,٨٥٠) = ٠,٢٨٤

وعلى ذلك ، فإن الحصص المتوقعه للشركات الثلاث خلال شهر يناير ٢٠٠١م :

س	ص	ع
(٠,٢٣٤	٠,٤٨٢	٠,٢٨٤)

وبمقارنة حصص الشركات الثلاثه فى شهر ديسمبر ٢٠٠٠م بحصص الشركات فى شهر يناير ٢٠٠١م نلاحظ أن حصة الشركه (س) زادت من ٠,٢٢ إلى ٠,٢٣٤ ، وفى نفس الوقت انخفضت حصة الشركه (ص) وحصة الشركه (ع) ، ومجموع الإنخفاض فى الشركات (ص ، ع) يساوى مجموع الزياده فى حصة الشركه (س) ولكن مازال مجموع حصص كل الشركات يعادل الواحد الصحيح ،

** هذا ولحساب الحصص المتوقعه للشركات فى أول فبراير ٢٠٠١م ، فإننا نضرب :

حصص الشركات		مصفوفة
فى أول يناير	×	التحركات
سنة ٢٠٠١		الإحتماليه

$$\begin{pmatrix} ٠,٢٤٥ \\ ٠,٤٧٦ \\ ٠,٢٧٩ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٠,٢٣٤ \\ ٠,٤٨٢ \\ ٠,٢٨٤ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ٠,٠٨٣ & ٠,٠٧ & ٠,٨ \\ ٠,٦٧ & ٠,٩ & ٠,١ \\ ٠,٨٥ & ٠,٠٣ & ٠,١ \end{pmatrix} =$$

ولحساب الحصص المتوقعه للشركات فى أول مارس ٢٠٠١ ، فإننا نضرب :

حصص الشركات		مصفوفة
فى أول فبراير	×	التحركات
سنة ٢٠٠١		الإحتماليه

∴ حصص الشركات فى السوق فى أول مارس ٢٠٠١ =

$$\begin{pmatrix} ٠,٢٤٥ \\ ٠,٤٧٦ \\ ٠,٢٧٩ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ٠,٠٨٣ & ٠,٠٧ & ٠,٨ \\ ٠,٦٧ & ٠,٩ & ٠,١ \\ ٠,٨٥ & ٠,٠٣ & ٠,١ \end{pmatrix} =$$

وهكذا

هذا وبدلاً من تكرار عمليات الضرب هذه حتى نصل إلى حصص شهر أبريل ، فإنه يمكن ضرب مصفوفة التحركات الإحتماليه خلال شهر يناير مرفوعه إلى أس ٣ (يناير-فبراير-مارس) ، فى حصص شهر يناير، ولحساب حصص شهر مايو نضرب مصفوفة التحركات الإحتماليه لشهر يناير مرفوعه إلى أس ٤ فى حصص شهر يناير ، وهكذا .

وباستخدام طاقات الحاسبات الألكترونيه يمكن الإستفاده من الطريقه الأخيره هذه فى حساب حصص السوق عن أي فتره مقبله بطريق مباشر دون تكرار لعمليات الضرب.

مثال (١)

في ٢٠٠٢/١/١م كانت سوق إحدى السلع محتكرة بثلاث شركات (أ ، ب ، جـ) وكان عدد العملاء على الترتيب ٦٠٠٠ ، ٣٠٠٠ ، ١٠٠٠ ، وأثناء السنة كانت تحركات العملاء على النحو التالي :

- ١٢٠٠ من (أ) إلى (ب)
- ٦٠٠ من (أ) إلى (جـ)
- ٢٤٠٠ ظلو يتعاملون مع (ب)
- ٣٠٠ من (ب) إلى (أ)
- ٢٠٠ من (جـ) إلى (أ)
- ٤٠٠ من (جـ) إلى (ب)

والمطلوب تحديد نصيب كل شركة من الشركات الثلاث في ٢٠٠٣/١/١م ؟.

الحــل :

يمكن توضيح تحركات العملاء بين الشركات على النحو التالي :

الشركه	عدد العملاء فى ١/١ ٢٠٠٢	تحركات (تدفقات) العملاء						عدد العملاء فى ١/١ ٢٠٠٣
		مكســب من			خســـاره إلى			
		من أ	من ب	من جـ	إلى أ	إلى ب	إلى جـ	
أ	٦٠٠٠	—	٣٠٠	٢٠٠	—	١٢٠٠	٦٠٠	٤٧٠٠
ب	٣٠٠٠	١٢٠٠	—	٤٠٠	٣٠٠	—	٣٠٠	٤٠٠٠
جـ	١٠٠٠	٦٠٠	٣٠٠	—	٢٠٠	٤٠٠	—	١٣٠٠
المجموع	١٠٠٠٠							١٠٠٠٠

ومن هذا الجدول السابق يمكن إيجاد نصيب كل شركة من الشركات الثلاث على النحو التالي :

حصة (أ) = $\frac{٤٧٠٠}{١٠٠٠٠}$ = ٠,٤٧

حصة (ب) = $\frac{٤٠٠٠}{١٠٠٠٠}$ = ٠,٤٠

حصة (جـ) = $\frac{١٣٠٠}{١٠٠٠٠}$ = ٠,١٣

أو يمكن ضرب حصص الشركاء في ٢٠٠٢/١/١ × مصفوفة التحركات الإحتمالية للوصول للحصص السابقة ٠

ولإيجاد مصفوفة التحركات الإحتمالية (إحتمالات الإنتقال) نتبع الآتي :

إحتمالات الإحتفاظ والخسارة للعملاء :

الشركة / الإحتمال	أ	ب	جـ
الإحتفاظ	$\frac{٦٠٠٠-١٨٠٠}{٦٠٠٠}$ = ٠,٧	$\frac{٢٤٠٠}{٣٠٠٠}$ = ٠,٨	$\frac{١٠٠٠-٦٠٠}{١٠٠٠}$ = ٠,٤
فقد العملاء للشركة (أ)	صفر	$\frac{٣٠٠}{٣٠٠٠}$ = ٠,١	$\frac{٢٠٠}{١٠٠٠}$ = ٠,٢
فقد العملاء للشركة (ب)	$\frac{١٢٠٠}{٦٠٠٠}$ = ٠,٢	صفر	$\frac{٤٠٠}{١٠٠٠}$ = ٠,٤
فقد العملاء للشركة (جـ)	$\frac{٦٠٠}{٦٠٠٠}$ = ٠,١	$\frac{٣٠٠}{٣٠٠٠}$ = ٠,١	صفر
مجموع الإحتمالات	١,٠٠	١,٠٠	١,٠٠

وعلى ذلك تكون مصفوفة التحركات الإحتماليه (مصفوفة إحتمالات الإنتقـــال) على النحو التالى :

خسارة ↓ / مكسب ←	أ	ب	جـ
أ	٠,٧	٠,١	٠,٢
ب	٠,٢	٠,٨	٠,٤
جـ	٠,١	٠,١	٠,٤

وبفرض أن التحركات الإحتمـاليه فى هذا المثال ستظل ثابته ، وأن حصص الشركات فى ٢٠٠٢/١/١ وفقاً للبيانات السابقه كما يلى : -

حصة (أ) $= \frac{\text{٦٠٠٠}}{\text{١٠٠٠٠}} = \text{٦٠ ٪}$

حصة (ب) $= \frac{\text{٣٠٠٠}}{\text{١٠٠٠٠}} = \text{٣٠ ٪}$

حصة (جـ) $= \frac{\text{١٠٠٠}}{\text{١٠٠٠٠}} = \text{١٠ ٪}$

∴ حصص الشركات فى السوق فى ٢٠٠٣/١/١ =

= مصفوفة التحركات الإحتماليه × حصص الشركات فى أول يناير سنة ١٩٩٩

$$= \begin{pmatrix} \text{٠,٧} & \text{٠,١} & \text{٠,٢} \\ \text{٠,٢} & \text{٠,٨} & \text{٠,٤} \\ \text{٠,١} & \text{٠,١} & \text{٠,٤} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \text{٠,٦٠} \\ \text{٠,٣٠} \\ \text{٠,١٠} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{٠,٤٧} \\ \text{٠,٤٠} \\ \text{٠,١٣} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \text{أ} \\ \text{ب} \\ \text{جـ} \end{pmatrix}$$

وإذا أردنا التنبؤ بنصيب كل شركة في ٢٠٠٤/١/١ ، يكون :

الحصص المتوقعه للشركات فى ٢٠٠٤/١/١ =

= مصفوفة التحركات الإحتماليه × حصص الشركات فى أول يناير سنة ٢٠٠٣

$$= \begin{pmatrix} ٠,٧ & ٠,١ & ٠,٢ \\ ٠,٢ & ٠,٨ & ٠,٤ \\ ٠,١ & ٠,١ & ٠,٤ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ٠,٤٧ \\ ٠,٤٠ \\ ٠,١٣ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٠,٣٩٥ \\ ٠,٤٦٦ \\ ٠,١٣٩ \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \text{أ} \\ \text{ب} \\ \text{جـ} \end{pmatrix}$$

مثال (٢)

في أول يناير من عام ٢٠٠٢م كان لكل مصنع من مصانع الألبان الثلاث (أ ، ب ، جـ) أنصبة في السوق (٢٥٪ ، ٤٠٪ ، ٣٥٪) على الترتيب وعلى مدار السنة إحتفظ المصنع (أ) بـ ٨٠٪ من عملائه ، بينما خسر ١٢ ٪ للمصنع (ب) ، وخسر ٨ ٪ للمصنع (جـ)٠أما المصنع (ب) فقد إحتفظ بـ ٩٠٪ من عملائه ، بينما خسر ٥ ٪ للمصنع (أ) ، وخسر ٥ ٪ المصنع (جـ)٠ أما المصنع (جـ) فقد إحتفظ بـ ٩٥٪ من عملائه ، بينما خسر ٣ ٪ للمصنع (أ) ، وخسر ٢ ٪ للمصنع (جـ)٠ فإذا إستمر هذا السلوك الخاص بالعملاء خلال السنة القادمة حدد النسب المئوية لنصيب كل مصنع في السوق في أول يناير من عام ٢٠٠٣م

الحل :

حصص الشركات الحالية في السوق هي :

أ	ب	جـ
٠,٢٥	٠,٤٠	٠,٣٥

ووفقا لإحتمالات المكسب والخسارة بين الشركات ، تكون مصفوفة إحتمالات الإنتقال في العام الحالي كما يلي :

خسارة ↓ / مكسب ←	أ	ب	جـ
أ	٠.٨	٠,٠٥	٠,٠٣
ب	٠,١٢	٠,٩	٠,٠٢
جـ	٠,٠٨	٠,٠٥	٠,٩٥

∴حصص الشركات الثلاث في أول يناير عام ٢٠٠٣ =

$$\begin{pmatrix}0.2305\\0.3970\\0.3725\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0.25\\0.40\\0.35\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0.03 & 0.05 & 0.8\\0.02 & 0.9 & 0.12\\0.95 & 0.05 & 0.08\end{pmatrix} =$$

أي أنه سيصبح نصيب المصنع (أ) ٢٣,٠٥ ٪ ، نصيب المصنع (ب) ٣٩,٧٪ ونصيب المصنع (جـ) ٣٧,٢٥٪ من السوق في أول يناير ٢٠٠٣

مثال (٣)

في أول يونيو ٢٠٠٢م كان المخبز (أ) يحصل على ٤٠ ٪ من السوق المحلية ، وكان مخبزيْ (ب ، جـ) كل منهما يحصل على ٣٠ ٪ من السوق المحلية ، وبعد عمل بحث تسويقي لمدة شهرين وُجد أن المخبز (أ) إحتفظ بـ ٨٥٪ من عملائه ، بينما يحصل على ٥ ٪ من عملاء المخبز (ب) ، ١٠ ٪ من عملاء المخبز (جـ) ، أما المخبز (ب) إحتفظ بـ ٩٠٪ من عملائه ، بينما يحصل على ٥ ٪ من عملاء المخبز (أ) ، ٥ ٪ من عملاء المخبز (جـ) ، أما المخبز (جـ) إحتفظ بـ ٨٥٪ من عملائه ، بينما يحصل على ١٠ ٪ من عملاء المخبز (أ) ، ٥ ٪ من عملاء المخبز (ب)٠ والمطلوب إيجاد حصص المخابز الثلاث من السوق في أول أغسطس من عام ٢٠٠٢م ؟٠

الحـــل :

مصفوفة التحركات الإحتمـالية :

خسارة \ مكسب	أ	ب	جـ
أ	٠,٨٥	٠,٠٥	٠,١٠
ب	٠,٠٥	٠,٩	٠,٠٥
جـ	٠,١٠	٠,٠٥	٠,٨٥

الحل :

حصص المخابز فى السوق فى أول أغسطس ٢٠٠٢ =

= مصفوفة التحركات الإحتماليه × حصص المخابز فى أول يونيو ٢٠٠٢

$$= \begin{pmatrix} ٠,٨٥ & ٠,٠٥ & ٠,١٠ \\ ٠,٠٥ & ٠,٩٠ & ٠,٠٥ \\ ٠,١٠ & ٠,٠٥ & ٠,٨٥ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ٠,٤٠ \\ ٠,٣٠ \\ ٠,٣٠ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٠,٣٨٥ \\ ٠,٣٠٥ \\ ٠,٣١٠ \end{pmatrix}$$

- ☒ نصيب المخبز (أ) = ٣٨,٥٪ من السوق .
- ☒ نصيب المخبز (ب) = ٣٠,٥ ٪ من السوق .
- ☒ نصيب المخبز (جـ) = ٣١ ٪ من السوق .

مثال (٤)

ثلاث من الشركات التجارية تقوم بتسويق أجهزة الراديو والتلفزيون في مدينة المنصورة ، وقامت هذه الشركات (س ، ص ، ع) بدراسة سوقها لمعرفة مدى قدرتها على المحافظة على عملائها ، وقد أعطت الشركات هذه البيانات عن الفترة من أول أكتوبر حتى أول ديسمبر ٢٠٠٢م ، وطلبت منك التنبؤ بسوقها أول فبراير ٢٠٠٣م ؟

وكانت البيانات كما يلي :

الشركه	عدد العملاء فى ١٠/١ ٢٠٠٢	تحركات العملاء مكسب أضافته الشركات من			عدد العملاء فى ١٢/١ ٢٠٠٢
		س	ص	ع	
س	٨٠٠	—	٣٥	٤٥	٨٤٠
ص	٦٠٠	١٠	—	٣٥	٥٨٥
ع	٥٠٠	٣٠	٢٥	—	٤٧٥
المجموع	١٩٠٠				١٩٠٠

الحـــل :

أولاً : جدول تحركات (تدفقات العملاء) :

من هذا الجدول السابق يمكن إيجاد جدول تدفقات العملاء بين الشركات الثلاث على النحو التالي :

الشركه	عدد العملاء في ١/١٠/٢٠٠٢	تحركات (تدفقات) العملاء: مكسب من س	مكسب من ص	مكسب من ع	خساره إلى س	خساره إلى ص	خساره إلى ع	عدد العملاء في ١/١٢/٢٠٠٢
س	٨٠٠	—	٣٥	٤٥	—	١٠	٣٠	٨٤٠
ص	٦٠٠	١٠	—	٣٥	٣٥	—	٢٥	٥٨٥
ع	٥٠٠	٣٠	٢٥	—	٤٥	٣٥	—	٤٧٥
المجموع	١٩٠٠							١٩٠٠

ثانياً : جدول الإحتمالات :

الإحتمال \ الشركة	س	ص	ع
الإحتفاظ	$\frac{٨٠٠-٤٠}{٨٠٠}$ = ٠,٩٥	$\frac{٦٠٠-٦٠}{٦٠٠}$ = ٠,٩	$\frac{٥٠٠-٨٠}{٥٠٠}$ = ٠,٨٤
خسائر للشركة الأولى	$\frac{١٠}{٨٠٠}$ = ٠,٠١٢٥	$\frac{٣٥}{٦٠٠}$ = ٠,٠٨٥٣	$\frac{٤٥}{٥٠٠}$ = ٠,٠٩
خسائر للشركة الثانية	$\frac{٣٠}{٨٠٠}$ = ٠,٠٣٧٥	$\frac{٢٥}{٦٠٠}$ = ٠,٠٤١٧	$\frac{٣٥}{٥٠٠}$ = ٠,٠٧

ثالثاً : مصفوفة التحركات الإحتماليه

يتم ترتيب الإحتمالات السابقة في شكل مصفوفة التحركات الإحتماليه (مصفوفة إحتمالات الإنتقال) على النحو التالى :

خسارة \ مكسب	س	ص	ع
س	٠,٩٥٠٠	٠,٠٥٨٣	٠,٠٩
ص	٠,٠١٢٥	٠,٩٠٠٠	٠,٠٧
ع	٠,٠٣٧٥	٠,٠٤١٧	٠,٨٤

رابعاً : حصص الشركات فى ١/١٢/٢٠٠٢ كما يلى : -

حصة (س) $= \frac{٨٤٠}{١٩٠٠} =$ ٤٤ ٪

حصة (ص) $= \frac{٥٨٥}{١٩٠٠} =$ ٣١ ٪

حصة (ع) $= \frac{٤٧٥}{١٩٠٠} =$ ٢٥ ٪

خامساً : نصيب كل شركة في أول فبراير ٢٠٠٣م :

∴ حصص الشركات فى السوق فى ١/٢/٢٠٠٣ =

= مصفوفة التحركات الإحتماليه × حصص الشركات فى أول ديسمبر سنة ٢٠٠٢م

$$\begin{pmatrix} ٠,٩٥٠٠ & ٠,٠٥٨٣ & ٠,٠٩ \\ ٠,٠١٢٥ & ٠,٩٠٠٠ & ٠,٠٧ \\ ٠,٠٣٧٥ & ٠,٠٤١٧ & ٠,٨٤ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ٠,٤٤ \\ ٠,٣١ \\ ٠,٢٥ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٠,٤٥٨٦ \\ ٠,٣٠٢٠ \\ ٠,٢٣٩٤ \end{pmatrix} \begin{matrix} \rightarrow \\ \rightarrow \\ \rightarrow \end{matrix} \begin{pmatrix} س \\ ص \\ ع \end{pmatrix}$$

أي أن أنصبة الشركات س ، ص ، ع من السوق في الفترة القادمة هي :

٤٦٪ ، ٣٠٪ ، ٢٤ ٪ على الترتيب ٠

مثال (٥)

شركة مُقسمة إلى ثلاثة أقسام ، وتسمح هذه الشركة بحرية إنتقال العاملين بين الأقسام المختلفة ، وكانت حركات إنتقال العاملين بين الأقسام خلال الفترة من أول يونيو ٢٠٠٣ حتى أول سبتمبر ٢٠٠٣م كما يلي :

القسم	عدد العاملين فى أول يونيو ٢٠٠٣	الإضافة من			عدد العاملين فى أول سبتمبر ٢٠٠٣
		الأول	الثاني	الثالث	
الأول	٣٠	—	٢	٤	٣٥
الثاني	٦٠	١	—	٣	٦١
الثالث	٤٠	—	١	—	٣٤
المجموع	١٣٠				١٣٠

والمطلوب التنبؤ بعدد العاملين في كل قسم في ديسمبر٢٠٠٣م (النسب المئوية للعاملين بكل قسم)

الحـــل :

أولاً : عمل جدول التدفقات :

القسم	عدد العاملين فى أول يونيو ٢٠٠٣	تحركات العاملين						عدد العاملين فى أول سبتمبر ٢٠٠٣
		الإنتقال من			الإنتقال إلى			
		الأول	الثاني	الثالث	الأول	الثاني	الثالث	
الأول	٣٠	—	٢	٤	—	١	—	٣٥
الثاني	٦٠	١	—	٣	٢	—	١	٦١
الثالث	٤٠	—	١	—	٤	٣	—	٣٤
المجموع	١٣٠							١٣٠

ثانياً : جدول الإحتمالات :

الشركة / الإحتمال	س	ص	ع
الإحتفاظ	$\frac{٣٠ - ١}{٣٠}$ = ٠,٩٧	$\frac{٦٠ - ٣}{٦٠}$ = ٠,٩٥	$\frac{٤٠ - ٧}{٤٠}$ = ٠,٨٢
نقص للأول	$\frac{١}{٣٠}$ = ٠,٠٣	$\frac{٢}{٦٠}$ = ٠,٠٣	$\frac{٤}{٤٠}$ = ٠,١٠
نقص للثاني	$\frac{صفر}{٣٠}$ = صفر	$\frac{١}{٦٠}$ = ٠,٠٢	$\frac{٣}{٤٠}$ = ٠,٠٨

ثالثاً : يتم ترتيب الإحتمالات السابقة في شكل مصفوفة التحركـات الإحتماليـه (مصفوفة إحتمالات الإنتقال) على النحو التالى :

$$\begin{pmatrix} ٠,١٠ & ٠,٠٣ & ٠,٩٧ \\ ٠,٠٨ & ٠,٩٥ & ٠,٠٣ \\ ٠,٨٢ & ٠,٠٢ & \text{صفر} \end{pmatrix}$$

رابعاً : نسب العاملين في كل قسم في أول سبتمبر ٢٠٠٣م كما يلى : -

نسبة القسم الأول $= \frac{٣٥}{١٣٠}$ = ٢٧ ٪

نسبة القسم الثاني $= \frac{٦١}{١٣٠}$ = ٤٧ ٪

نسبة القسم الثالث $= \frac{٣٤}{١٣٠}$ = ٢٦ ٪

خامساً : نصيب كل قسم في أول ديسمبر ٢٠٠٣م :

$$= \begin{pmatrix} ٠,٩٧ & ٠,٠٣ & ٠,١٠ \\ ٠,٠٣ & ٠,٩٥ & ٠,٠٨ \\ \text{صفر} & ٠,٠٢ & ٠,٨٣ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ٠,٢٧ \\ ٠,٤٧ \\ ٠,٢٦ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٠,٣٠٢٠ \\ ٠,٤٧٥٤ \\ ٠,٢٢٢٦ \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \text{الأول} \\ \text{الثاني} \\ \text{الثالث} \end{pmatrix}$$

∴ النسب المئوية للعاملين في أول ديسمبر ٢٠٠٣ في الأقسام الثلاثة هي :

القسم الأول　　٣٠٪

القسم الثاني　　٤٨٪

القسم الثالث　　٢٢٪

حالة الثبات أو الإتزان في سلاسل ماركوف :

حالة الإتزان هي التي لابد أن تنتهي إليها عمليات التحول بين مختلف الحالات ، أو هي الحالة النهائية التي تحدث وتستمر طالما بقيت مصفوفة إحتمالات الإنتقال (مصفوفة التحركات الإحتمالية) كما هي دون تغيير ٠

أولاً : تحديد حالة الإتزان (التوازن) إذا كانت مصفوفة إحتمالات الإنتقال مكونة من حالتين فقط (٢×٢) :

مثال : إذا كانت مصفوفة إحتمالات الإنتقال كما يلي :

	س	ص
س	٠,٧	٠,١٦
ص	٠,٣	٠,٨٤

فأن حصة (س) في حالة التوازن كما يلي :

$$\text{حصة س} = \frac{\text{إحتمال التحول من س إلى ص}}{\text{إحتمال التحول من س إلى ص + إحتمال التحول من س إلى ص}}$$

$$= \frac{\text{٠,١٦}}{\text{٠,٣} + \text{٠,١٦}} = \frac{\text{٠,١٦}}{\text{٠,٤٦}} = \text{٠,٣٥}$$

حصة (ص) = ١ – ٠.٣٥ = ٠,٠٦٥

وللتأكد من ذلك نقوم بضرب مصفوفة إحتمالات الإنتقال × حصص التوازن ، فيكون الناتج هو نفس حصص التوازن

$$\begin{pmatrix} \text{٠,٧} & \text{٠,١٦} \\ \text{٠,٣} & \text{٠,٨٤} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \text{٠,٣٥} \\ \text{٠,٦٥} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{٠,٣٥} \\ \text{٠,٦٥} \end{pmatrix}$$

مثال (٦)

إذا كانت مصفوفة إحتمالات الإنتقال لمنتجين أ ، ب كما يلي :

	أ	ب
أ	٠,٦	٠,٣
ب	٠,٤	٠,٧

المطلوب حساب حصة كل منتج عند نقطة التوازن ؟

الحــل :

حصة التوازن بالنسبة للمنتج (أ) $= \frac{\text{٠,٣}}{\text{٠,٣} + \text{٠,٤}} = \frac{\text{٠,٣}}{\text{٠,٧}} = \text{٠,٤٣}$

حصة التوازن بالنسبة للمنتج (ب) =١-٠,٤٣ = ٠,٥٧

ويمكن الحل بطريقة مطولة كما يلي :

$$\because \begin{pmatrix} \text{٠,٦} & \text{٠,٣} \\ \text{٠,٤} & \text{٠,٧} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \text{أ} \\ \text{ب} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{أ} \\ \text{ب} \end{pmatrix}$$

∴ ٠,٦ أ + ٠,٣ ب = أ　　　(١)

٠,٤ أ + ٠,٧ ب = ب　　　(٢)

وبتحويل المعادلتين إلى معادلات صفرية :

∴ - ٠,٤ أ + ٠.٣ ب = صفر (٣)

٠,٤ أ - ٠.٣ ب = صفر (٤)

وبإضافة المعادلة :

أ + ب = ١ (٥)

وحيث أنه يوجد مجهولين وثلاث معادلات ، وبإهمال المعادلة (٣) ، وحل المعادلتين (٤) ، (٥) بإستخدام المحددات ، فإن :

$$\text{أ} = \frac{\begin{vmatrix} \text{صفر} & -٠,٣ \\ ١ & ١ \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} ٠,٤ & -٠,٣ \\ ١ & ١ \end{vmatrix}} = \frac{\text{صفر} + ٠,٣}{٠,٤ + ٠,٣} = \frac{٠,٣}{٠,٧} = ٠,٤٣$$

∴ ب = ١-٠,٤٣ = ٠,٥٧

ثانياً : تحديد حالة الإتزان (التوازن) إذا كانت مصفوفة إحتمالات الإنتقال مكونة من ثلاث حالات (٣×٣) :

مثال : إذا كانت مصفوفة إحتمالات الإنتقال بين ثلاث شركات كما يلي :

	س	ص	ع
س	٠,٨	٠,٠٧	٠,١٢
ص	٠,١	٠,٩٠	٠,٠٨
ع	٠,١	٠,٠٣	٠,٨٠

فإنه لتحديد حصص التوازن ، نطبق العلاقه التاليه :

مصفوفة التحركات الإحتماليه × متجه نصيب المصانع من السوق (فى حالة التوازن) = نفس متجه المصانع من السوق .

$$\because \begin{pmatrix} \text{٠,٨} & \text{٠,٠٧} & \text{٠,١٢} \\ \text{٠,١} & \text{٠,٩٠} & \text{٠,٠٨} \\ \text{٠,١} & \text{٠,٠٣} & \text{٠,٨٠} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{pmatrix}$$

يمكن التعبير عن ذلك بثلاث معادلات على النحو التالى : ــــ

٠,٨س + ٠,٠٧ص + ٠,١٢ع = س (١)

٠,١س + ٠,٩٠ص + ٠,٠٨ع = ص (٢)

٠,١س + ٠,٠٣ص + ٠,٨٠ع = ع (٣)

حيث أن مجموع أنصبة الثلاثة مصانع من السوق = ١ ، فإنه يمكن إضافة معادله إخرى على النحو التالى :

س + ص + ع = ١ (٤)

بإعادة ترتيب المعادلات نجد أن :

س + ص + ع = ١ (٤)

-٠,٢س + ٠,٠٧ص + ٠,١٢ع = صفر (٥)

٠,١س + -٠,١ص + ٠,٠٨ع = صفر (٦)

٠,١س + ٠,٠٣ص + -٠,٢٠ع = صفر (٧)

حيث أنه لدينا أربعة معادلات وثلاثة مجاهيل ، فإننا نهمل أحد المعادلات لتكن المعادله (٧) ، وبحل المعادلات الباقيه باستخدام أى طريقه ولتكن لمحددات أو المصفوفات ، أو بطريقة الحذف والتعويض ، فإننا نجد أن :

س = ٠,٣ ص = ٠,٤٨ ع = ٠,٢٢

ي أن حصص التوازن للشركات الثلاث هى :

س ص ع

(٠,٣ ٠,٤٨ ٠,٢٢)

وللتحقق من صحة التوازن ، فإننا نضرب قيمة مصفوفة التحركات الإحتماليه × قيمة حصص التوازن ، فسنجد أن الناتج هو نفس قيمة حصص التوازن قبل ضرب مصفوفة التحركات الإحتماليه فيه ٠

مثال (٧)

إذا كان لدينا مصفوفة إحتمالات الإنتقال بين ثلاث منتجات (أ ، ب ، جـ) كما يلي :

	أ	ب	جـ
أ	٠,٨	٠,٢٠	٠,١٠
ب	٠,١	٠,٧٠	٠,٣٠
جـ	٠,١	٠,١٠	٠,٦٠

المطلوب إيجاد الأنصبة في حالة التوازن ؟

الحــل :

لتحديد حصص التوازن ، نطبق العلاقه التاليه :

$$\because \begin{pmatrix} ٠,٨ & ٠,٢ & ٠,١ \\ ٠,١ & ٠,٧ & ٠,٣ \\ ٠,١ & ٠,١ & ٠,٦ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \text{أ} \\ \text{ب} \\ \text{جـ} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{أ} \\ \text{ب} \\ \text{جـ} \end{pmatrix}$$

ويمكن التعبير عن ذلك بثلاث معادلات على النحو التالى : -

٠,٨ أ + ٠,٢ب + ٠,١جـ = أ (١)

٠,١ أ + ٠,٧ب + ٠,٣جـ = ب (٢)

٠,١ أ + ٠,١ب + ٠,٦جـ = جـ (٣)

وحيث أن مجموع الأنصبة الثلاثة = ١ . فإنه يمكن إضافة معادله إخرى على النحو التالى :

س + ص + ع = ١ (٤)

وبإعادة ترتيب المعادلات وتحويله إلى معادلات صفرية ، نجد أن :

-٠,٢أ + ٠,٢ب + ٠,١جـ = صفر (٤)
٠,١أ + -٠,٣ب + ٠,٣جـ = صفر (٥)
٠,١أ + ٠,١ب + -٠,٤جـ = صفر (٦)
أ + ب + جـ = ١ (٧)

وحيث أنه لدينا أربعة معادلات وثلاثة مجاهيل ، فإننا نهمل أحد المعادلات ولتكن المعادله (٦) ، وبحل المعادلات الباقيه باستخدام أى طريقه ولتكن المحددات أو المصفوفات ، أو بطريقة الحذف والتعويض ، حيث تصبح المعادلات كما يلي :

-٠,٢أ + ٠,٢ب + ٠,١جـ = صفر (٤)
٠,١أ + -٠,٣ب + ٠,٣جـ = صفر (٥)
أ + ب + جـ = ١ (٧)

وبفرض أن أ = ٠,٤٥ ، فإن :

-٠,٠٩ ÷ ٠,٢ب + ٠,١جـ = صفر (٨)
٠,٠٤٥ + -٠,٣ب + ٠,٣جـ = صفر (٩)
٠,٤٥ + ب + جـ = ١ (١٠)

ومن ثم نكون ثلاث معادلات كالآتي :

٠,٢ب ÷ ٠,١جـ = ٠,٠٩ (١١)
-٠,٣ب ÷ ٠,٣جـ = -٠,٠٤٥ (١٢)
ب ÷ جـ = ٠,٥٥ (١٣)

ولما كان عدد المعادلات ثلاث وعدد المجاهيل إثنان ، فإننا نستبعد إحدى المعادلات ولتكن المعادلة (١٢)

٠,٢ب + ٠,١جـ = ٠,٠٩ (١١)

ب + جـ = ٠,٥٥ (١٣)

وبضرب المعادلة (١٣) × ٠,٢

٠,٢ب + ٠,٢جـ = ٠,١١ (١٤)

وبطرح المعادلة (١١) من المعادلة (١٤)

٠,٢ب + ٠,٢جـ = ٠,١١ (١٤)

٠,٢ب + ٠,١جـ = ٠,٠٩ (١٣)

∴ ٠,١ جـ = ٠,٠٢

∴ جـ = $\frac{٠,٠٢}{٠,١}$ = ٠,٢

وحيث أن :

أ + ب + جـ = ١

∴ ٠,٤٥ + ب + ٠,٢ = ١

∴ ب = ١ – ٠,٦٥ = ٠,٣٥

∴ حصص التوازن هى :

أ ب جـ

(٠,٤٥ ٠,٣٥ ٠,٢٠)

سلاسل ماركوف وتحديد إستراتيجيات التسويق :-

تتعدد مجالات إستخدام أسلوب سلاسل ماركوف ليس فقط فى التنبؤ بحصص السوق للشركات وتحديد حصص التوازن ، ولكن يمكن الإستفاده منه أيضاً فى ترشيد القرارات الإداريه فى مجال تحديد إستراتيجيات التسويق ولعل الأمثلة التاليو توضح ذلك :

مثال (٨)

تفاضل إحدى الشركات بين استئجار مولدين كهربائيين يتماثلان في القيمة الإيجارية ، ولقد توافرت لديك مصفوفة إحتمالات الإنتقال لحالتيْ الرواج والكساد لكل من المولدين كما يلي :

مصفوفة إحتمالات الإنتقال للمولد الأول

	أ	ب
أ	٠,٦	٠,٣
ب	٠,٤	٠,٧

مصفوفة إحتمالات الإنتقال للمولد الأول

	أ	ب
أ	٠,٨	٠,٤
ب	٠,٢	٠,٦

حيث أ تمثل حالة الرواج ، ب يمثل حالة الكساد وذلك لكل من المولدين ، فما هو المولد الذي توصي الشركة باستئجاره ؟

الحــل :

<u>بالنسبة للمولد الأول :</u>

إحتمال أن يكون المولد في حالة رواج عند التوازن = $\frac{٠,٣}{٠,٣ + ٠,٤}$ = ٠,٤٣

بالنسبة للمولد الثاني :

إحتمال أن يكون المولد في حالة رواج عند التوازن = $\frac{٠,٤}{٠,٤ + ٠,٢} = ٠,٦٧$

ومعنى هذه النتائج أن احتمال بقاء المولد الأول في حالة رواج لحظة تحقق التوازن وما بعدها هو ٤٣٪ ، بينما احتمال بقاء المولد الثاني في حالة رواج لحظة تحقق التوازن وما بعدها هو ٦٧٪ ، ومن ثم نوصي الشركة باستئجار المولد الثاني.

مثال (٩)

آله لها ثلاث حالات من التشغيل ، حيث أ يمثل حالة التشغيل في حالة الرواج ، ب يمثل التشغيل في الحالة العادية ، جـ يمثل التشغيل في حالة الكساد ، وكانت مصفوفة إحتمالات الإنتقال من ساعة إلى أخرى كما يلي :

	أ	ب	جـ
أ	٠,٧٠	—	٠,٥
ب	٠,١٥	٠,٦	—
جـ	٠,١٥	٠,٤	٠,٥

والمطلوب :

حدد إحتمالات التوازن لكل حالة من الحالات الثلاث ؟

إذا كان ربح الساعة لكل حالة من الحالات الثلاث هو ٣٠ ، ٢٠ ، ١٠ للحالات أ ، ب ، جـ ، على التوالي ، فاوجد متوسط الربح في الساعة ؟

ـحـل :

ـ إيجاد حالة التوازن كما سبق أن أوضحنا في حالة مصفوفة (٣×٣) ، ـنجد أن :

أ = ٠,٥٠٦ ، ب = ٠,١٩٠ ، جـ = ٠,٣٠٤

ـ. متوسط الربح في الساعة عند حدوث التوازن والفترات التالية له =

= ٠,٥٠٦ × ٣٠ + ٠,١٩ × ٢٠ + ٠,٣٠٤ × - ١٠

= ١٥,١٨ + ٣,٨ - ٣,٠٤ = ١٥,٩٤ جنيه.

ـال (١٠)

ـافس متجران للتجزئة على اجتزاب العملاء البالغ عددهم ١٠٠٠٠ عميل ، ـانت مصفوفة إحتمالات الإنتقال كما يلي :

	أ	ب
أ	٠,٧٥	٠,٣٥
ب	٠,٢٥	٠,٦٥

ـالمطلوب تحديد متوسط مجمل الربح لكل متجر في حالة التوازن إذا علمت أن ـجمل الربح لكل عميل هو ٣ جنيهات ؟

ـذا علمت أن المتجر الأول يفاضل بين استراتيجيتين من أجل تحسين ربحيته ـأولى تتمثل في القيام بحملة إعلانية تتكلف ٥٠٠ جنيه ، والثانية تتمثل في ـديم خصم قدره ٠,٢ جنيه للعملاء المبقين على التعامل مع المتجر.

ـذا كانت الإستراتيجية الأولى ستؤدي إلى زيادة نسبة التحول من المتجر أ ـصبح ٠,٤٥ بدلاً من ٠,٣٥ ، وفيما يتعلق بالإستراتيجية الثانية ستؤدي إلى ـيادة نسبة الإحتفاظ لدى المتجر أ من ٠,٧٥ إلى ٠,٨٠ ، فما هي ـإستراتيجية التي توصي المتجر أ باتباعها ؟

الحــل :

(١) إيجاد احتمالات التوازن :

$$أ = \frac{٠,٣٥}{٠,٢٥ + ٠,٣٥} = \frac{٠,٣٥}{٠,٦٠} = ٠,٥٨$$

$$ب = ١ - ٠,٥٨ = ٠,٤٢$$

∴ ربح المتجر الأول = ١٠٠٠ × ٠,٥٨ × ٣ = ١٧٤٠ جنيه

∴ ربح المتجر الثاني = ١٠٠٠ × ٠,٤٢ × ٣ = ١٢٦٠ جنيه

(٢) إختبار إستراتيجية الإعلان للمتجر الأول :

	أ	ب
أ	٠,٧٥	٠,٤٥
ب	٠,٢٥	٠,٥٥

∴ نسب التوازن الجديدة

$$أ = \frac{٠,٤٥}{٠,٢٥ + ٠,٤٥} = \frac{٠,٤٥}{٠,٧٠} = ٠,٦٤$$

$$ب = ١ - ٠,٦٤ = ٠,٣٦$$

∴ ربح المتجر الأول = (١٠٠٠ × ٠,٦٤ × ٣) – ٥٠٠ = ١٤٢٠ جنيه

وعلى ذلك فإن هذه الإستراتيجية مرفوضة حيث أدت إلى تخفيض الربح بمقدار:

١٧٤٠ – ١٤٢٠ = ٣٢٠ جنيه للمتجر الأول في حالة قيامه بالحملة الإعلانية.

(٣) إختبار إستراتيجية الخصم لدى المتجر الأول :

	أ	ب
أ	٠,٨٠	٠,٣٥
ب	٠,٢٠	٠,٦٥

∴ نسب التوازن الجديدة

$$أ = \frac{٠,٣٥}{٠,٢٠ + ٠,٣٥} = \frac{٠.٣٥}{٠.٥٥} = ٠,٦٤$$

∴ ربح المتجر الأول = ١٠٠٠ × ٠,٦٤ × ٢,٨ = ١٧٩٢ جنيه

ويُلاحظ أن هذه الإستراتيجية قد أدت إلى زيادة مجمل الربح لدى المتجر الأول من ١٧٤٠ جنيه إلى ١٧٩٢ جنيه ، ومن ثم نوصي المتجر الأول بتبني إستراتيجية الخصم ٠

مثال (١١)

بفرض أن مصفوفة التحركات الإحتمالية لثلاث شركات (س ، ص ، ع) تنتج وتبيع نفس المنتج ولكن تحت علامات تجاريه مختلفه ، كانت على النحو التالى :

	س	ص	ع
س	٠,٨٥	٠,٠٨	٠,٠٧
ص	٠,١٠	٠,٨٥	٠,٠٣
ع	٠,٠٥	٠,٠٧	٠,٩٠

وبفرض عدم تغير إستراتيجيات التسويق للشركات الثلاثه ، وبقاء مصفوفة التحركات الإحتماليه دون تغيير ، فإن حصص التوازن تكون كما يلى :

س	ص	ع
(٠,٣٣	٠,٣٠	٠,٣٧)

ونظراً لأن الشركه (ص) وجدت أن حصتها فى السوق أقل الحصص ، وهذا لايتناسب مع مكانتها السابقه فى السوق ، فقد فكرت الإداره فى حل يمكنها من تحسين وضعها فى السوق وزيادة حصتها ، وبالدراسه إتضح أن هناك بديلان أمام الإداره وهما :

البديل الأول :

تغيير سياسة البيع ونظام التحصيل من العملاء ويترتب على ذلك زيادة نسبة احتفاظها بعملائها من ٨٥٪ إلى ٩٠٪ فى مقابل أن تقل نسبة ما تخسره إلى الشركه (س) من ٨٪ إلى ٣٪ .

البديل الثانى :

إدخال بعض التعديلات على طريقة تغليف المنتج ، وفى نفس الوقت القيام بحمله إعلانيه لإعلام العملاء بهذا التطوير فى التغليف ، ويترتب على هذا زيادة نسبة ما تكسبه من عملاء الشركه (س) إلى ١٥٪ وزيادة نسبة ما تكسبه من عملاء الشركه (ع) إلى ٥٪ .

هذا وترغب إدارة الشركه (ص) فى المفاضله بين هذين البديلين وإختيار أفضلهما على فرض أن :

١ - تكلفة البديلين متساويه .

٢- المبيعات الكليه من هذا المنتج للشركات الثلاث تُقدر بمبلغ ١٠ مليون جنيه ، وأن أرباح الشركه (ص) تعادل ١٥٪ من مبيعاتها ، ويُتوقع أن تستمر هذه التقديرات فى الفتره القادمه . علماً بأن تكلفة البديل الأول تُقدر بمبلغ ٦٠٠٠٠ جنيه ، فى حين تُقدر تكلفة البديل الثانى بمبلغ ١٠٠٠٠٠ جنيه .

الحـــل :

<u>التحليل المقترح</u>

** <u>البديل الأول :</u>

طبقاً لهذا البديل تكون مصفوفة التحركات الإحتماليه على النحو التالى :

	س	ص	ع
س	٠,٨٥	٠,٠٣	٠,٠٧
ص	٠,١٠	٠,٩٠	٠,٠٣
ع	٠,٠٥	٠,٠٧	٠,٩٠

وتكون حصص التوازن فى هذه الحالة كما يلى :

س	ص	ع
(٠,٢٥	٠,٣٧	٠,٣٨)

ويلاحظ زيادة حصة الشركه (ص) من ٣٠٪ إلى ٣٧ ٪ على حساب الشركه (س) ، وزيادة نصيب الشركه (ع) من ٣٧ ٪ إلى ٣٨ ٪ ، ونقص نصيب الشركه (س) من ٣٣ ٪ إلى ٢٥ ٪ .

**** البديل الثانى :**

طبقاً لهذا البديل تكون مصفوفة التحركات الإحتماليه على النحو التالى :

	س	ص	ع
س	٠,٨٠	٠,٠٨	٠,٠٧
ص	٠,١٥	٠,٨٥	٠,٠٥
ع	٠,٠٥	٠,٠٧	٠,٨٨

وتكون حصص التوازن فى هذه الحاله كما يلى :

س	ص	ع
٠,٢٧	٠,٣٩	٠,٣٤

ويلاحظ فى هذا البديز زيادة حصة الشركه (ص) من ٣٠ ٪ إلى ٣٩ ٪ ، أي بزياده قدرها ٩٪ فى حين إنخفضت حصة الشركه (س) من ٣٣ ٪ إلى ٢٧ ٪ ، أي بنسبة ٦ ٪ ، وكذلك إنخفضت حصة الشركه (ع) من ٣٧ ٪ إلى ٣٤ ٪ ، أي بنسبة ٣ ٪.

**** المفاضله بين البديلين :**

(١) فى حالة تساوى تكلفة البديلين :

يُعتبر البديل الثانى أفضل ، حيث أنه فى ظل البديل الثانى تصبح حصة الشركه (ص) ٣٩ ٪ ، فى حين أنها فى البديل الأول تصبح ٣٧ ٪ .

(٢) فى حالة تساوى تكلفة البديلين :

تتم المفاضله على أساس مقارنة صافى العائد من كل بديل ويتم إختيار البديل الذى يعظم دالة منفعة الشركه كما يلى :

بيان	البديل الأول	البديل الثانى
إيراد المبيعات الكلى	١٠٠٠٠٠٠٠	١٠٠٠٠٠٠٠
حصة الشركه (ص)	١٠٠٠٠٠٠٠× ٠,٣٧ = ٣٧٠٠٠٠٠ جنيه	١٠٠٠٠٠٠٠× ٠,٣٩ = ٣٩٠٠٠٠٠ جنيه
نسبة ربح الشركه (ص)	١٥ ٪	١٥ ٪
الأرباح	٥٥٥٠٠٠	٥٨٥٠٠٠
طرح تكلفة البديل	٦٠٠٠٠	١٠٠٠٠٠
صافى ربح البديل	٤٩٥٠٠٠	٤٨٥٠٠٠

على ضوء هذه المقارنه يفضل البديز الأول لأنه يحقق للشركه (ص) عائداً إفضل من البديل الثانى .

مثال (١٢)

قُدمت إليك مصفوفة التحركات الإحتماليه (إحتمالات الإنتقال) الخاصة بثلاث مصانع (أ ، ب ، جـ) تقوم بإنتاج نفس المنتج ولكن تحت علامات تجاريه مختلفه ، وذلك كالآتي :

	أ	ب	جـ
أ	٠,٦	٠,١	٠,٢
ب	٠,٢	٠,٥	٠,١
جـ	٠,٢	٠,٤	٠,٧

وقد قام قسم التسويق في المصنع أ برسم استراتيجية تسويقية تتضمن تفضيل العملاء لعلامة الشركة وتحددت البدائل التالية :

البديل الأول : القيام بحملة إعلانية تُوجه إلى عملاء الشركة الأصلية وتضمن إرتفاع تفضيلهم لعلامة الشركة إلى ٧٥ ٪ بدلاً من ٦٠ ٪ ، وتخسر لحساب الشركة جـ ٥ ٪ بدلاً من ٢٠ ٪

البديل الثاني : توجيه الحملة الإعلانية إلى عملاء الشركة ب وتغيير ميولهم لتفضيل علامة الشركة بحيث تكون نسبة العملاء المنتقلين إليها من الشركة ب ١٥ ٪ بدلاً من ١٠ ٪ ، ويكون ذلك على حساب ما تحتفظ به الشركة ب حيث يصبح ٤٥ ٪ بدلاً من ٥٠ ٪

البديل الثالث : زيادة نسبة العملاء المنتقلين إليها من الشركة جـ إلى ٣٠ ٪ بدلاً من ٢٠ ٪ ، ويكون ذلك على حساب ما تحتفظ به الشركة جـ ليصبح ٦٠ ٪ بدلاً من ٧٠ ٪

فإذا علمت أن :

١. تبلغ تكاليف الحملة الإعلانية ١٠٠٠٠٠ جنيه.
٢. تحقق الحملة الإعلانية زيادة في ربح الشركة بمقدار ٦٠٠٠ جنيه عن كل نقطة يمكن كسبها من حصة السوق.

والمطلوب :

١. حساب حصص السوق في حالة الإتزان للشركات الثلاثة قبل القيام بالحملة الإعلانية ؟
٢. ما هي استراتيجية الإعلان التي تحقق للشركة (أ) أكبر حصة في السوق ؟

الحــل :

يتم إيجاد حصص التوازن للآتي :

١- قبل القيام بالحملة الإعلانية :

$$\begin{pmatrix} ٠,٢ & ٠,١ & ٠,٦ \\ ٠,١ & ٠,٥ & ٠,٢ \\ ٠,٧ & ٠,٤ & ٠,٢ \end{pmatrix}$$

وسنجد أن : أ = ٠,٢٧ ، ب = ٠,٣٨ ، جـ = ٠,٣٥

٢- البديل الأول :

$$\begin{pmatrix} ٠,٢ & ٠,١ & ٠,٧٥ \\ ٠,١ & ٠,٥ & ٠,٢٠ \\ ٠,٧ & ٠,٤ & ٠,٠٥ \end{pmatrix}$$

وسنجد أن : أ = ٠,٥٠ ، ب = ٠,٢٥ ، جـ = ٠,٢٥

٣- البديل الثاني :

$$\begin{pmatrix} ٠,٢ & ٠,١٥ & ٠,٦ \\ ٠,١ & ٠,٤٥ & ٠,٢ \\ ٠,٧ & ٠,٤٠ & ٠,٢ \end{pmatrix}$$

وسنجد أن : أ = ٠,٣٢ ، ب = ٠,٢٠ ، جـ = ٠,٤٨

٤- البديل الثالث :

$$\begin{pmatrix} ٠,٣ & ٠,١ & ٠,٦ \\ ٠,١ & ٠,٥ & ٠,٢ \\ ٠,٦ & ٠,٤ & ٠,٢ \end{pmatrix}$$

وسنجد أن : أ = ٠,٣٦ ، ب = ٠,٢٣ ، جـ = ٠,٤١

ومن هنا نجد أن أفضل إستراتيجية للمصنع (أ) هي البديل الأول ، حيث بلغت حصة (أ) = ٥٠ ٪ بزيادة قدرها ٢٣ ٪ ، أي أن

الأرباح الزائدة = ٢٣ × ٦٠٠٠ = ١٣٨٠٠٠ جنيه

يُخصم منها تكاليف الإعلان ١٠٠٠٠٠ جنيه :

١٣٨٠٠٠ − ١٠٠٠٠٠ = ٣٨٠٠٠ جنيه .

تمارين على سلاسل ماركوف

(١) إذا كانت مصفوفة إحتمالات الإنتقال لثلاث شركات (س ، ص ، ع) تنتج نفس السلعه مع إختلاف العلامه التجاريه كالتالى :

	س	ص	ع
س	٠,٢	٠,١	٠,٢
ص	٠,٦	٠,٥	٠,٣
ع	٠,٢	٠,٤	٠,٥

والمطلوب :

أولاً : حساب نصيب السوق فى حالة الإتزان للشركات الثلاث ؟.

ثانياً : إذا أرادت الشركه (س) توجيه مجهوداتها لزيادة نصيبها فى السوق ، فأيهما أفضل للشركه (س) :

(أ) أن توجه مجهوداتها للإحتفاظ بنسبه أكبر من عملائها على حساب (ص) ، أي تحتفظ بنسبة ٤٠٪ بدلاً من ٢٠٪ ، وتخسر لحساب (ص) ٤٠٪ بدلاً من ٦٠٪ .

(ب)أن تركز حملتها لكسب عدد أكبر من عملاء (ع) ، أي بنسبة ٤٠٪ من (ع) بدلاً من ٢٠٪ ، على أن يكون ذلك إما على حساب (ص) الذى يكسب ١٠% فقط بدلاً من ٣٠ ٪ ، أو على حساب (ع) نفسه بـ ٣٠ ٪ فقط بدلاً من ٥٠٪ .

وضح أثر كل بديل على كافة الشركات الثلاث ؟.

(٢) إذا فرضنا أن نوع معين من المأكولات المحفوظه طُرح فى السوق فى وقت واحد بواسطة ثلاث مصانع ، وقد طرحت الثلاثة مصانع (أ ، ب ، جـ) منتجاتها المختلفه لهذا الصنف المعين فى يناير ، وفى البدايه كان نصيب كل مصنع = ثلث السوق ، وخلال السنه حدثت التطورات التاليه :

- المصنع (أ) إحتفظ بـ ٨٠٪ من عملائه ، وخسر ١٢٪ للمصنع (ب) ، وخسر ٨٪ للمصنع (جـ) ٠
- المصنع (ب) إحتفظ بـ ٧٠ ٪ من عملائه ، وخسر ٢٠ ٪ للمصنع (أ) ، وخسر ١٠٪ للمصنع (جـ) ٠
- المصنع (جـ) ، إحتفظ بـ ٩٠ ٪ من عملائه ، وخسر ٥ ٪ للمصنع (أ) ، وخسر ٥ ٪ للمصنع (ب) ٠

وإذا فرضنا أن السوق لم يتسع :

(١) ماهو نصيب كل مصنع من السوق فى العام القادم ؟٠

(٢) تنبأ بحالة الإتزان إذا بقيت العادات الشرائيه بدون تغيير ؟٠

(٣) فى أول يونيه كان مخبز (أ) يحصل على ٤٠ ٪ من السوق المحليه ، وكان مخبزي (ب) ، (جـ) كل منهما يحصل على ٣٠ ٪ من السوق المحليه ، وبعد عمل بحث تسويقى وُجد أن مخبز (أ) يحتفظ بـ ٨٥ ٪ من عملائه فى كل شهر ، بينما يحصل عنى ٥ ٪ من عملاء مخبز (ب) ، ١٠٪ من عملاء مخبز (جـ) ، أما مخبز (ب) يحتفظ بـ ٩٠ ٪ من عملائه ، ويحصل على ٥ ٪ من عملاء (جـ) ، أما مخبز (جـ) يحتفظ بـ ٨٥٪ من عملائه ، ويحصل على ١٠٪ من عملاء (أ) ، ٥٪ من عملاء (ب) ، والمطلوب : - (١) إيجاد حصة كل مخبز من السوق فىأول أغسطس ؟٠

(٢) ماهى حصة كل مخبز فى السوق فى حالة الإتزان ؟٠

(٤) فى آخر ديسمبر ١٩٨٦ كان نصيب الشركه (أ) من السوق ٢٠٪ ، وكان نصيب كل من الشركات (ب) ، (جـ) ٣٠ ٪ ، ٥٠ ٪ على الترتيب وخلال العام ١٩٨٦ كانت مبيعات هذه الصنلعه ١٠٠ مليون جنيه ، وكانت للشركه (أ) أرباح تعادل ٢٪ من المبيعات ، ومن المتوقع أن يستمر هذين الرقمين كما هما فى العام ١٩٨٧ .

وترغب الشركه (أ) فى القيام بحمله إعلانيه إضافيه تبلغ تكلفتها ٥٠٠٠٠ جنيه ، وسوف تحقق لها الإحتفاظ بنسبة ٦٠٪ من العملاء وتربح ١٠ ٪ من الشركه (ب) ، ٢٠٪ من الشركه (جـ) ، ومن المتوقع أن تحتفظ الشـركه (ب) بنسبة ٥٠٪ من العملاء ، وتربح ٢٠٪ من (أ) ، ١٠٪ من (جـ) ، أما الشركه (جـ) فمن المتوقع أن تحتفظ بنسبة ٧٠٪ من العملاء ، وتربح ٢٠٪ من (أ) ، ٤٠٪ من (ب)

والمطلوب : -

(١) حساب حصص الشركات الثلاث فى السوق عام ١٩٨٧م ؟.

(٢) هل يجب أن تقوم الشركه (أ) بالحمله الإعلانيه ؟.

(٥) فى أول يوليه كانت الشركه (أ) تحصل على ٤٠٪ من السوق المحليه وكان كل من الشركتين (ب) ، (جـ) تحصل على ٣٠٪ من السوق المحليه ، وقد قامت الشركه (ب) باقتراح القيام بالإعلان من خلال ثلاث وسائل إعلانيه .

وقد ظهرت مصفوفة التحركات الإحتماليه للعملاء طبقاً لكل وسيله من الوسائل الإعلانيه كالآتى :

الراديو = $\begin{pmatrix} ٠,١ & ٠,١ & ٠,٤ \\ ٠,٢ & ٠,٧ & ٠,٥ \\ ٠,٧ & ٠,٢ & ٠,١ \end{pmatrix}$ التلفزيون = $\begin{pmatrix} ٠,١ & ٠,٣ & ٠,٧ \\ ٠,٧ & ٠,٦ & ٠,٢ \\ ٠,٢ & ٠,١ & ٠,١ \end{pmatrix}$

الجرائد = $\begin{pmatrix} - & - & ٠,٢ \\ ٠,٢ & ٠,٧ & ٠,٥ \\ ٠,٨ & ٠,٣ & ٠,٣ \end{pmatrix}$

فإذا كانت تكلفة الإعلان فى كل وسيله إعلانيه تبلغ : ٦٠٠ ، ٢٧٠٠ ، ٩٠٠ جنيه شهرياً ٠

المطلوب :

١- حصة كل شركه فى السوق فى أول أغسطس فى ضوء كل وسيله إعلانيه ؟

٢- ما هى حصة كل شركه فى السوق فى ضوء كل وسيله إعلانيه فى حالة التوازن

٣- ما هى أفضل وسيله إعلانيه للشركه (ب) ؟

٤- ما هى أرباح الشركه (ب) من كل وسيله إعلانيه إذا علمت أنها تحقق ٥٠ جنيه أرباح عن كل نسبه ١% إضافيه فى حصتها السوقيه ؟

(٦) فى أول يناير قام المصنع (ص) بتقديم منتج جديد فى السوق بعد عمل بحث تسويقى وجد أن المصنع (س) يحتفظ بـــ ٢٠٪ من عملائه فى كل شهر بينما يحصل على ١٠٪ من عملاء مصنع (ص) ، وعلى ٥٪ من عملاء مصنع (ع) ٠ أما المصنع (ص) يحتفظ بنسبة ٦٠٪ من عملائه ويحصل على ٥٠٪ من عملاء مصنع (س) وعلى ٤٠٪ من عملاء مصـــنع (ع) ، أما المصنع (ع) فيحتفظ بـــ ٥٥ ٪ من عملائه ويحصل على ٣٠ ٪ من (س) ، وعلى ٣٠ ٪ من عملاء (ص)٠

فما هى حصة كل مصنع فى السوق فى حالة التوازن ؟٠

(٧) فيما يلى مصفوفة الإنتقال الإحتماليه الخاصه بالمصانع (س، ص، ع)

	س	ص	ع
س	٠,٨٠٠	٠,١٠٠	٠,١٠٠
ص	٠,٠٧٠	٠,٩٠٠	٠,٠٣٠
ع	٠,٠٨٣	٠,٠٦٧	٠,٨٥٠

وكانت حصص السوق فى أول مارس ٢٠٠٣م (٢٥٪ ، ٤٠٪ ، ٣٥٪) للمصانع الثلاثه على الترتيب ، حدد حصص هذه المصانع فى السوق فى أول أبريل ، وأول مايو من نفس السنه ؟.

(٨) حلل مصفوفة التحركات الإحتماليه التاليه ، ثم حدد مدى توازن أنصبة السوق لكل من المصانع (أ ، ب ، جـ) :

	أ	ب	ج
أ	١	٠,١٠	٠,١٠
ب	—	٠,٧٥	٠,٠٥
ج	—	٠,١٥	٠,٨٥

(٩) فى أول سبتمبر كان المشتركون فى الصحف اليوميه فى منطقه محدده كالتالى :

الأهرام ٥٠٪ الأخبار ٢٥٪ الجمهوريه ٢٥٪

وفى خلال شهر سبتمبر حدثت التغيرات التاليه :

- إحتفظت الأهرام بـ $\frac{٧}{٨}$ من المشتركين ، وخسرت $\frac{١}{٨}$ منهم للأخبار
- إحتفظت الأخبار بـ $\frac{١}{١٢}$ من المشتركين ، وخسرت $\frac{٣}{٤}$ منهم للأهرام ، $\frac{١}{٦}$ منهم للجمهوريه .
- إحتفظت الجمهوريه بـ $\frac{١}{٣}$ من المشتركين ، وخسرت $\frac{١}{٢}$ منهم للأهرام ، $\frac{١}{٦}$ منهم للأخبار .

فإذا فرضنا عدم وجود مشتركين جدد ، وأن أحداً من المشتركين لن يستغن عن إشتراكه .

المطلوب :

١. تحديد نصيب كل جريده من المشتركين فى أول أكتوبر ؟.
٢. إذا إستمر نمط المكسب والخساره بالنسبه للصحف كما هو خلال شهر أكتوبر ، فما هو نصيب كل جريده من المشتركين فى أول نوفمبر ؟.
٣. إذا إستمر نمط المكسب والخساره بالنسبه للصحف كما هو كل شهر، فما هو نصيب كل جريده من المشتركين فى حالة التوازن ؟.

الفصل التاسع

طريقة النقل

The Transportation Method

مقدمة

تتعلق مشكلة النقل بقرارات تخصيص أو تعيين الطريقة المثلى للإنتقال المادي لكميات من السلع توجد في نقاط معينة يُطلق عليها نقاط التوريد أو الإمداد (من المصانع مثلاً) إلى مواقع أخرى يُطلق عليها نقاط الطلب (إلى المخازن أو إلى مناطق التوزيع) ، وذلك بشرط أن تصل التكلفة الكلية للنقل أدنى ما يمكن. فتكاليف النقل من الأهمية بالنسبة للإدارة بحيث أن أي توفير فيها يعود على الشركة بأرباح طائلة.

مشكلة النقل هي نموذج رياضي تم تكوينه بشكل خاص مستهدفاً تحديد البديل الأمثل لنقل وتوزيع كميات معينة من ما هو متاح من مصادر التوريد إلى مناطق استهلاك أو مستودعات نحتاج تموينها بكميات معينة، بحيث تصل تكلفة النقل إلى حدها الأدنى.

خطوات حل مشكلة النقل :

(١) إعداد الحل المبدئي الممكن :

ويقوم هذا الحل المبدئي الممكن على أساس تلبية احتياجات مناطق التوزيع أو المخازن في حدود طاقة المصانع ، ويمكن إعداد الحل المبدئي الممكن باستخدام إحدى طريقتين :

١. طريقة الركن الأيمن العلوي (طريقة الركن الشمالي الشرقي)
٢. طريقة أدنى تكلفة

(٢) إختبار مثالية الحل :

بعد إعداد الحل المبدئي الممكن يتم اختبار مثالية هذا الحل لتحديد مدى امكانية تخفيض تكلفة النقل بتغير الحل ، وإذا اتضح من اختبار المثالية أن الحل غير أمثل يتم تعديل الحل إلى أن يتم الوصول الى الحل الأمثل ، ويمكن اختبار مثالية الحل باستخدام عدة طرق أهمها :

١. طريقة حجر الوطء (الحجر المتنقل) أو استبنج ستون.
٢. طريقة التوزيع المعتدل

ونظراً لطبيعة مشكلة النقل ، يُستخدم لحلها جدول خاص يُسمى جدول النقل يتكون من عدد من الصفوف يساوى عدد المصادر (المصانع) وعدد من الأعمدة يساوي عدد مناطق التوزيع (أو الإستهلاك) وتُعرف الخلية بأنها تقاطع المصدر (المصنع) مع منطقة التوزيع. ويُوضع في الخلية الكميات التي يتقرر نقلها من المصدر إلى منطقة التوزيع، وتُوضع تكلفة النقل في مربع صغير في الركن الأيسر العلوي من كل خلية.

عدد الخلايا في كل جدول = عدد المصادر × عدد مناطق التوزيع

وبغرض توضيح مشكلة النقل وكيفية صياغتها كمشكلة سنطرح المثال التالي الذى روعي فيه التبسيط بغرض التوضيح.

مثال توضيحي :

تنتج إحدى الشركات الكبرى في ج.م.ع. منتجاً واحداً متماثلاً في ثلاث مصانع نوعية تقع جغرافياً في طنطا ، المنصورة ، دمنهور ، وتبلغ طاقات المصانع الثلاثة في السنة القادمة من الوحدات المنتجة الكميات التالية (بآلاف الوحدات) ١٥٠ ، ١٢٠ ، ٨٠ على الترتيب.

ويتم نقل تلك الكميات إلى مخازن التوزيع الأربعة التابعة للشركة ليتم تسليمها بعد ذلك إلى العملاء ، وتبلغ احتياجات تلك المخازن الأربعة من نفس السنة التخطيطية القادمة ما مقداره كالآتي (بالألف وحدة) مخزن الأسكندرية ٦٠ ، مخزن المحلة ١٣٠ ، مخزن كفر الشيخ ١١٠، مخزن الزقازيق ٥٠ ، ولقد توفر للشركة المعلومات الكاملة والمتعلقة بتكلفة نقل الوحدة من كل مصنع من المصانع الثلاثة إلى كل مخزن من مخازن التوزيع الأربعة ، وكانت هذه التكلفة كما هو مبين في الجدول التالي :

المخزن / المصنع	تكلفة نقل الوحدة باجنيهات إلى			
	الأسكندرية	المحلة	كفر الشيخ	الزقازيق
طنطا	٦	١٢	٤	٣
المنصورة	٨	١٥	٧	٨
دمنهور	٣	١١	٢	٥

والمطلوب :

إيجاد جدول النقل أو(الشحن) الأمثل للفترة التخطيطية القادمة ، والذي يفي باحتياجات المخازن الأربعة من انتاج المصانع الثلاثة ، بحيث تصل تكلفة النقل إلى أدنى حد ممكن؟.

الحـــل :

أولاً : صياغة المشكلة في صورة جدول :

وهنا يتم عمل جدول يُسمى جدول النقل يتكون من صفوف = عدد المصانع ، وأعمدة = عدد المخازن ويُوضع في الخلية تكلفة النقل في مربع صغير فى الركن الأيسر العلوي من كل خلية.

من \ إلى	س١	س٢	س٣	س٤	إجمالى العرض
أ١	٦	١٢	٤	٣	١٥٠
أ٢	٨	١٥	٧	٨	١٢٠
أ٣	٣	١١	٢	٥	٨٠
إجمالى الطلب	٦٠	١٣٠	١١٠	٥٠	٣٥٠

ثانياً : إيجاد الحل المبدئي باستخدام إحدى الطريقتيْن :

١. طريقة الركن الشمالي الشرقي North west corner method

٢. طريقة أدنى تكلفة في المصفوفة

وسوف نتناول كلا الطريقتيْن على النحو التالي :

١) طريقة الركن الشمالي الشرقي : North west corner method

ابدأ بالخلية الواقعة فى أعنى اليمين وهي الخلية أ١س١ وضع بها كمية من الوحدات تساوي كمية صفها أو كمية عموده أيهما أقل ، ثم تحرك إلى يسار الخلية أو إلى أسفلها (حسب مقتضيات الحال) وأشغلها بكمية تساوي كمية صفها أو كمية عمودها أيهما أقل ... ويتم الإستمرار في هذا العمل حتى يتم مقابلة كل قيود التوريد وقيود الطلب ، وسيظهر جدول الحل المبدئي وخطواته طبقاً لطريقة الركن الشمالي الشرقي كما يلي :

إلى / من	س$_{١}$	س$_{٢}$	س$_{٣}$	س$_{٤}$	العرض
أ$_{١}$	[٦] ٦٠	[١٢] ٩٠	[٤]	[٣]	١٥٠
أ$_{٢}$	[٨]	[١٥] ٤٠	[٧] ٨٠	[٨]	١٢٠
أ$_{٣}$	[٣]	[١١]	[٢] ٣٠	[٥] ٥٠	٨٠
الطلب	٦٠	١٣٠	١١٠	٥٠	٣٥٠

وستكون التكلفة الإجمالية للنقل وفقاً للجدول المبدئي =

= ٦×٦٠ + ١٢×٩٠ + ١٥×٤٠ + ٧×٨٠ + ١٢×٣٠ + ٥×٥٠

= ٢٩١٠ جنيه.

٢) طريقة أدنى تكلفة في المصفوفة :

يتم البحث في المصفوفة كلها عن تلك الخلية التي تكون فيها تكلفة نقل الوحدة أدنى تكلفة بالمصفوفة كلها ، وبالنظر إلى المصفوفة التي تمثل المثال الحالى ، نجد أن الخلية أ$_{٣}$س$_{٣}$ هي تلك الخلية التي تمثل فيها تكلفة نقل الوحدة أدنى تكلفة بالمصفوفة كلها (٢ جنيه للوحدة) ، عندئذ يتم شغل تلك الخلية بكمية صفها ٨٠ وحدة أو كمية عمودها ١١٠ وحدة أيهما أقل ، أي يتم شغلها بكمية مقدارها ٨٠ وحدة ، ويتم استنزال هذه الكمية من طاقة المصنع أ$_{٣}$ والذي يتبين أنه استنفذ طاقته بالكامل ، ويتم استنزالها أيضاً من احتياجات المخزن س$_{٣}$ ، فيصبح هذا المخزن في حاجة إلى ٣٠ وحدة فقط (١١٠-٨٠) . ثم يتم البحث بعد ذلك عن خلية ذات أقل تكلفة نقل للوحدة

للمصفوفة كلها ، ويتم الإستمرار في هذا العمل حتى يتم مقابلة كل قيود التوريد وقيود الطلب ، وسيظهر جدول الحل المبدئي وخطواته طبقاً لطريقة أدنى تكلفة في المصفوفة كما يلي :

من \ إلى	س١	س٢	س٣	س٤	العرض
أ١	٦ / ٦٠	١٢ / ١٠	٤ / ٣٠	٣ / ٥٠	١٥٠
أ٢	٨	١٥ / ١٢٠	٧	٨	١٢٠
أ٣	٣	١١	٢ / ٨٠	٥	٨٠
الطلب	٦٠	١٣٠	١١٠	٥٠	٣٥٠

وستكون التكلفة الإجمالية للنقل وفقاً للجدول المبدئي =

= ٦×٦٠ + ١٢×١٠ + ٤×٣٠ + ٣×٥٠ + ١٥×١٢٠ + ٢×٨٠

= ٢٧١٠ جنيه.

ثالثاً : تحديد الأمثلية :

وفقاً لمنهج طريقة النقل . فإن إيجاد الحل المبدئي الممكن يعتبر بمثابة الخطوة الأولى من خطوات حل مشكلة النقل ، وتكون الخطوة الثانية هي اختبار أمثلية الحل ، فإذا ما اتضح أن الحل أمثلاً نكون قد توصلنا إلى حل المشكلة ، أما إذا تبين أن الحل غير أمثل ، فإن الأمر يتطلب الإستمرار في العمل نحو تحسينه ، ويتم اختبار المثالية لمشاكل النقل بإحدى الطريقتين التاليتين :

١. طريقة نقطة الإرتكاز (حجر الوطء) Stepping Stone Method

٢. طريقة التوزيع المعتدل Modified Destribution Method

الطريقة الأولى : طريقة نقطة الإرتكاز (حجر الوطء)

ولتوضيح هذه الطريقة فإننا نأخذ جدول الحل المبدئي بطريقة الركن الشمالي الشرقي ، وبفرض أننا نرغب في اختبار مثالية هذا الجدول ، فإن ذلك يتطلب اختبار مثالية كافة الخلايا الفارغة. وتقضي طريقة نقطة الإرتكاز أن يتم تقييم تلك الخلايا غير المشغولة وغير المستغلة وذلك بغرض الوقوف على أثر شغل كل منها على التكاليف ، فإذا تبين ان شغل خلية ما بوحدة واحدة مثلاً سيترتب عليه خفض تكاليف النقل ، فإن جدول النقل يتم إعادة تعديله للإستفادة من ذلك . إن عملية التقييم هذه تتم من خلال تحديد خط سير الزيادات والتخفيضات ومن ثم المحصلة النهائية ، ولذلك هناك بعض الإعتبارات الواجب ملاحظتها عند تحديد خط السير وهي :

١. أن يكون خط السير (مسار الحلقة المغلقة Closed Loop) في صورة خطوط أفقية ورأسية ، أي يتعين أن تكون زوايا المسار كلها زوايا قائمة.

٢. أن يمر خط السير بخلايا مشغولة حتى يمكن تصور النقل منها ، ولكن هذا لا يمنع المرور بخلايا مشغولة دون الإنتقاص منها أو المرور بخلايا فارغة دون الإضافة إليها ، وذلك حفاظاً على كميات الصفوف والأعمدة.

٣. يُراعى دائماً الحفاظ على توازن الصفوف والأعمدة.

٤. مسار الحلقة المُغلقة عبارة عن مضلع جميع أركانه يتشكل من خلايا مشغولة عدا واحدة فقط هي الخلية التي يُراد تقييمها.

ملحوظة :

عند رسم المسار بدءاً من الخلية الفارغة ، تُوضع إشارة (+) في الخلية الفارغة المطلوب تقييمها ، ثم نبدأ باستكمال المسار بوضع الإشارة (-) في أول خلايا المسار ، ثم نستمر في استكمال الزوائد والنواقص وفقاً لهذا المسار.

عدد الخلايا المشغولة = عدد الصفوف + عدد الأعمدة -١

= ٣ + ٤ - ١ = ٦ خلايا مشغولة

جدول لتقييم الخلايا الفارغة (غير الأساسية)

الخلية الفارغة	مسار الخلية	صافي التغير في التكلفة
أ$_{١}$ س$_{٣}$	أ$_{١}$ س$_{٣}$ - أ$_{٢}$ س$_{٣}$ + أ$_{٢}$ س$_{٢}$ - أ$_{١}$ س$_{٢}$	٤-٧+١٥-١٢=صفر
أ$_{١}$ س$_{٤}$	أ$_{١}$ س$_{٤}$ - أ$_{٣}$ س$_{٤}$ + أ$_{٣}$ س$_{٣}$ - أ$_{٢}$ س$_{٣}$ + أ$_{٢}$ س$_{٢}$ - أ$_{١}$ س$_{٢}$	٣-٥+٢-٧+١٥ -١٢=-٤
أ$_{٢}$ س$_{١}$	أ$_{٢}$ س$_{١}$ - أ$_{١}$ س$_{١}$ + أ$_{١}$ س$_{٢}$ - أ$_{٢}$ س$_{٢}$	٨-٦+١٢-١٥=-١
أ$_{٢}$ س$_{٤}$	أ$_{٢}$ س$_{٤}$ - أ$_{٣}$ س$_{٤}$ + أ$_{٣}$ س$_{٣}$ - أ$_{٢}$ س$_{٣}$	٨-٥+٢-٧=-٢
أ$_{٣}$ س$_{١}$	أ$_{٣}$ س$_{١}$ - أ$_{١}$ س$_{١}$ + أ$_{١}$ س$_{٢}$ - أ$_{٢}$ س$_{٢}$ + أ$_{٢}$ س$_{٣}$ - أ$_{٣}$ س$_{٣}$	٣-٦+١٢-١٥+٧ -٢ = -١
أ$_{٣}$ س$_{٢}$	أ$_{٣}$ س$_{٢}$ - أ$_{٢}$ س$_{٢}$ + أ$_{٢}$ س$_{٣}$ - أ$_{٣}$ س$_{٣}$	١١-١٥+٧-٢ =+١

وباستعراض قيم صافي التغير في التكلفة للخلايا الستة التي يتم تقييمها يتضح أن هناك قيماً موجبة وقيماً صفرية وقيماً سالبة ، وهذا يعني الأمور التالية:

♦ قيمة صافي التغير في التكلفة ذات الإشارة الموجبة ، تعني أن النقل إلى هذه الخلية غير ناجح لأنه يترتب عليه ارتفاع في التكاليف.

♦ قيمة صافي التغير الصفرية ، تعني أن النقل عبر هذه الخلية لن يترتب عليه أي تأثير على التكاليف الإجمالية للنقل.

♦ قيمة صافي التغير في التكلفة ذات الإشارة السالبة والتي ظهرت عند الخلايا أ١ س٤ = -٤ ، أ٢ س١ = -١ ، أ٢ س٤ = -٢ ، أ٣ س١ = -١ ، تعني أن النقل عبر تلك الخلايا ناجح وسيترتب عليه انخفاض في التكاليف بمقدار صافي التغير بكل وحدة يتم نقلها. ومعنى ذلك أنه إذا ظهرت قيماً سالبة لصافي التغير لأي خلية فارغة ، فإن ذلك يعني أن الحل غير أمثل.

وبتطبيق هذه القاعدة على الجدول المبدئي السابق نستطيع أن نقول أنه جدول غير أمثل لوجود قيم صافي تغير سالبة للخلايا الفارغة. ولتحسين الحل فإننا نختار الخلية ذات أكبر قيمة بإشارة سالبة في صف صافي التغير ، وبتطبيق هذا المعيار فإن الخلية أ١ س٤ هي المرشحة للدخول ، حيث يبلغ صافي التغير بها (-٤) وهي أكبر قيمة بإشارة سالبة.

وبعد ذلك نحدد أكبر قيمة للمتغير الداخل وهي أقل كمية بالمسار للخلايا التي وضعت بها الإشارات السالبة وهي الخلية أ٣ س٤ حيث المية = ٥٠ ، وبعد ذلك يتم تحيل نمط النقل بالجدول المبدئي وحساب تكلفته الجديدة وذلك بعد اختيار المتغير (الخلية) الداخل وهو أ١ س٤ ، وبعد تحديد أقصى كمية يمكن نقلها عبر تلك الخلية (٥٠ وحدة) تأتي الخطوة التالية لتعديل نمط النقل الذي كان بالجدول المبدئي . وتتضمن هذه الخطوة ما يلي :

١. إضافة ٥٠ وحدة إلى الخلية التي تم اختبارها للنقل عبرها وهي الخلية أ$_{١}$ س$_{٤}$

٢. خصم وإضافة ذات الكمية (٥٠ وحدة) إلى الخلايا الواقعة على مسار سلسلة الزوائد والنواقص ، بمعنى عندما نجد أن إشارة الخلية موجبة يتم إضافة ٥٠ وحدة بالإضافة للكمية الموجودة بها ، وعندما نجد أن إشارة الخلية سالبة تخصم من الكمية الموجودة بها ٥٠ وحدة

٣. الكميات الموجودة بخلايا غير واقعة على سلسلة الزوائد والنواقصلا يلحقها أي تعديل بل تُنقل كما هي :

الخانات التي يشملها التعديل	الكمية
أ$_{٣}$ س$_{٤}$ (−)	٥٠ − ٥٠ = صفر
أ$_{٣}$ س$_{٣}$ (+)	٣٠ + ٥٠ = ٨٠
أ$_{٢}$ س$_{٣}$ (−)	٨٠ − ٥٠ = ٣٠
أ$_{٢}$ س$_{٢}$ (+)	٤٠ + ٥٠ = ٩٠
أ$_{١}$ س$_{٢}$ (−)	٩٠ − ٥٠ = ٤٠

الجدول الثاني

من \ إلى	س$_{١}$	س$_{٢}$	س$_{٣}$	س$_{٤}$	العرض
أ$_{١}$	[٦] ٦٠	[١٢] ٤٠	[٤]	[٣] ٥٠	١٥٠
أ$_{٢}$	[٨]	[١٥] ٩٠	[٧] ٣٠	[٨]	١٢٠
أ$_{٣}$	[٣]	[١١]	[٢] ٨٠	[٥]	٨٠
الطلب	٦٠	١٣٠	١١٠	٥٠	٣٥٠

وبناءاً على تعديل نمط النقل الذي يظهر بالجدول الثاني للحل ، فـإن تكاليف النقل الكلية طبقاً للجدول الثاني للحل تحسب كما يلي :

تكاليف النقل الكلية = ٦×٦٠ + ١٢×٤٠ + ٣×٥٠ + ١٥×٩٠

\+ ٧×٣٠ + ٢×٨٠ = ٢٧١٠ جنيه

وبمقارنة هذه التكاليف بتكلفة الجدول المبدئي الذي تـم تـم إعـداده بطريقة الركن الشمالي الشرقي ، نجد أن هذه التكلفة تقل بمقدار ٢٠٠ جنيـه (٢٩١٠-٢٧١٠) ؛ حيث تبين من اختبار المثالية أن كل وحدة يتم نقلها عبـر تلك الخلية تعمل على تخفيض في التكلفة مقدارها ٤ جنيه ، أي أن :

التخفيض الكلي = ٥٠ × ٤ = ٢٠٠ جنيه.

إختبار مثالية الحل بالجدول الثاني :

ويتم ذلك باتباع الأسلوب السابق توضيحه وهو تقييم الخلايا الفارغة.

جدول لتقييم الخلايا الفارغة (غير الأساسية)

الخلية الفارغة	مسار الخلية	صافي التغير في التكلفة
أ$_{١}$ س$_{٣}$	أ$_{١}$ س$_{٣}$ − أ$_{٢}$ س$_{٣}$ + أ$_{٢}$ س$_{٢}$ − أ$_{١}$ س$_{٢}$	٤-٧+١٥-١٢=صفر
أ$_{٢}$ س$_{١}$	أ$_{٢}$ س$_{١}$ − أ$_{١}$ س$_{١}$ + أ$_{١}$ س$_{٢}$ − أ$_{٢}$ س$_{٢}$	٨-٦+١٢-١٥=-١
أ$_{٢}$ س$_{٤}$	أ$_{٢}$ س$_{٤}$ − أ$_{١}$ س$_{٤}$ + أ$_{١}$ س$_{٢}$ − أ$_{٢}$ س$_{٢}$	٨-٣+١٢-١٥=+٢
أ$_{٣}$ س$_{١}$	أ$_{٣}$ س$_{١}$ − أ$_{٣}$ س$_{٣}$ + أ$_{٢}$ س$_{٣}$ − أ$_{٢}$ س$_{٢}$ + أ$_{١}$ س$_{٢}$ − أ$_{١}$ س$_{١}$	٣-٢+٧-١٥+١٢ -٦ = -١
أ$_{٣}$ س$_{٢}$	أ$_{٣}$ س$_{٢}$ − أ$_{٢}$ س$_{٢}$ + أ$_{٢}$ س$_{٣}$ − أ$_{٣}$ س$_{٣}$	١١-١٥+٧-٢ =+١
أ$_{٣}$ س$_{٤}$	أ$_{٣}$ س$_{٤}$ − أ$_{١}$ س$_{٤}$ + أ$_{١}$ س$_{٢}$ − أ$_{٢}$ س$_{٢}$ + أ$_{٢}$ س$_{٣}$ − أ$_{٣}$ س$_{٣}$	٥-٣+١٢-١٥+٧ -٢ = +٤

وباستعراض قيم صافي التغير في التكلفة للخلايا الستة التي يتم تقييمها يتضح أن هناك خليتين لهما نفس قيمة صافي تغير سالبة ، وهذا يعني أن الجدول الثاني ليس حلاً أمثلاً ويحتاج إلى تحسين .

تحسين الحل :

اختيار المتغير الداخل ، وسنجد أن الخليتين ذات صافي التغير السالب مرشحتان للدخول ، ويمكن الإختيار الجغرافي بينهما أو يمكن اختيار الخلية التي يمكن أن يتم نقل كمية أكبر إليها . نختار $أ_٢ س_١$ ، ثم نحدد أقل كمية بالمسار للخلايا التي وضعت بها الإشارات السالبة نجدها = ٦٠

الخانات التي يشملها التعديل	الكمية
$أ_١ س_١$ (-)	٦٠ - ٦٠ = صفر
$أ_١ س_٢$(+)	٤٠ + ٦٠ = ١٠٠
$أ_٢ س_٢$(-)	٩٠ - ٦٠ = ٣٠

الجدول الثالث

من \ إلى	$س_١$	$س_٢$	$س_٣$	$س_٤$	العرض
$أ_١$	[٦]	[١٢] ١٠٠	[٤]	[٣] ٥٠	١٥٠
$أ_٢$	[٨] ٦٠	[١٥] ٣٠	[٧] ٣٠	[٨]	١٢٠
$أ_٣$	[٣]	[١١]	[٢] ٨٠	[٥]	٨٠
الطلب	٦٠	١٣٠	١١٠	٥٠	٣٥٠

وبناءاً على تعديل نمط النقل الذي يظهر بالجدول الثالث للحل ، فـإن تكاليف النقل الكلية طبقاً للجدول الثاني للحل تحسب كما يلي :

تكاليف النقل الكلية = ١٠٠×١٢ + ٥٠×٣ + ٦٠×٨ + ٣٠×١٥

+ ٣٠×٧ + ٨٠×٢ =٢٦٥٠ جنيه

ومرةً أخرى نعود لإختبار مثالية الحل بالجدول الثالث عن طريق تقييم الخلايا الفارغة كما يلي :

جدول لتقييم الخلايا الفارغة (غير الأساسية)

الخلية الفارغة	مسار الخلية	صافي التغير في التكلفة
أ$_{١}$ س$_{١}$	أ$_{١}$ س$_{١}$ - أ$_{١}$ س$_{٢}$ + أ$_{٢}$ س$_{٢}$ - أ$_{٢}$ س$_{١}$	٦-١٢+١٥-٨=+١
أ$_{١}$ س$_{٣}$	أ$_{١}$ س$_{٣}$ - أ$_{٢}$ س$_{٣}$ + أ$_{٢}$ س$_{٢}$ - أ$_{١}$ س$_{٢}$	٤-٧+١٥-١٢=صفر
أ$_{٢}$ س$_{٤}$	أ$_{٢}$ س$_{٤}$ - أ$_{١}$ س$_{٤}$ + أ$_{١}$ س$_{٢}$ - أ$_{٢}$ س$_{٢}$	٨-٣+١٢-١٥=+٢
أ$_{٣}$ س$_{١}$	أ$_{٣}$ س$_{١}$ - أ$_{٣}$ س$_{٣}$ + أ$_{٢}$ س$_{٣}$ - أ$_{٢}$ س$_{٢}$ + أ$_{٢}$ س$_{١}$	٣-٢+٧-١٥+٨=+١
أ$_{٣}$ س$_{٢}$	أ$_{٣}$ س$_{٢}$ - أ$_{٣}$ س$_{٣}$ + أ$_{٢}$ س$_{٣}$ - أ$_{٢}$ س$_{٢}$	١١-٢+٧-١٥ =+١
أ$_{٣}$ س$_{٤}$	أ$_{٣}$ س$_{٤}$ - أ$_{١}$ س$_{٤}$ + أ$_{١}$ س$_{٢}$ - أ$_{٢}$ س$_{٢}$ + أ$_{٢}$ س$_{٣}$ - أ$_{٣}$ س$_{٣}$	٥-٣+١٢-١٥+٧ -٢ = +٤

ومن هنا يتبين أن الجدول الثالث يمثل الحل الأمثل ، حيـث أن قيمـة صـافي التغير لجميع الخلايا الفارغة إما صفرية أو موجبة.

الطريقة الثانية : طريقة التوزيع المعتدل (طريقة مودي Modi)

وطبقاً لهذه الطريقة يمكن حساب النتيجة بكل خلية شاغرة دون الحاجة إلى رسم كل المسارات المغلقة كما هو الحال في طريقة نقطة الإرتكاز (أو حجر الوطء) ، ويمكن اتباع الخطوات التالية :

١. سنبدأ بالحل المبدئي بأي طريقة ، إما بطريقة الركن الأيمن العلوي (طريقة الركن الشمالي الشرقي) أو طريقة أقل تكلفة .
٢. نرمز للصف بالرمز (ص) وترتيب الصف بالرمز (م)، فنقول مثلا $ص_{٢}$ أو الصف الثاني .
٣. نرمز للعمود بالرمز (ع) وترتيب العمود بالرمز (ن)، فنقول مثلا $ع_{٢}$ أو العمود الثاني .
٤. نرمز للتكلفة في الخلية بالرمز $ك_{م ن}$ فمثلا $ك_{٥٢}$ تمثل التكلفة في الصف الخامس العمود الثاني .
٥. بالنسبة للخانات أو الخلايا المشغولة يتم تطبيق المعادلة التالية :

$$ص_{م} + ع_{ن} = ك_{م ن}$$

وبوضع $ص_{١}$ = صفر يمكن الحصول على باقي قيم ص ، ع ، أي $ص_{٢}$ ، $ص_{٣}$ ، ... ، $ع_{١}$ ، $ع_{٢}$ ، ....

٦. مقياس التحسين وهو : $ك_{م ن} - ص_{م} - ع_{ن}$ ، أي التكلفة في الخلية التي ترتيبها من الصف م ومن العمود ن - ترتيب الصف - ترتيب العمود
٧. إذا وجدنا القيمة موجبة ، فهذا يعني أنه لا يمكن تخفيض تكاليف النقل ، أما إذا كانت القيمة سالبة فإنه يمكن التخفيض ثم يتم إكمال الحل باستخدام طريقة نقطة الإرتكاز أو حجر الوطء .

مثال (٢)

تمتلك إحدى الشركات ٣ مصانع أ١ ، أ٢ ، أ٣ ، وثلاث مناطق للتوزيع س١ ، س٢ ، س٣ ، وكانت المصانع تنتج وحدات متماثلة من منتج واحد وتبلغ الطاقة الإستيعابية لمناطق التوزيع كما يلي :

س١ = ١٢٠٠ وحدة ، س٢ = ٨٠٠ وحدة ، س٣ = ١٠٠٠ وحدة ، وتبلغ طاقة كل مصنع وتكاليف النقل من كل مصنع إلى كل منطقة توزيع على النحو التالي :

المصنع	الطاقة	تكلفة نقل الوحدة
أ١	٦٠٠ وحدة	إلى س١ = ٥ جنيه
		إلى س٢ = ٦ جنيه
		إلى س٣ = ٨ جنيه
أ٢	١٠٠٠ وحدة	إلى س١ = ٤ جنيه
		إلى س٢ = ٧ جنيه
		إلى س٣ = ٧ جنيه
أ٣	١٤٠٠ وحدة	إلى س١ = ٦ جنيه
		إلى س٢ = ٨ جنيه
		إلى س٣ = ٦ جنيه

والمطلوب تحديد خطة النقل المثلى لإنتاج المصانع على مناطق التوزيع المختلفة بما يؤدي إلى تدنية تكاليف النقل ، مع إعداد جدول الحل المبدئي الممكن وفقاً لطريقتي ١- الركن الشمالي الشرقي ٢- طريقة أدنى تكلفة واختبر مثالية الحل وفقاً لطريقتي :

١- طريقة نقطة الإرتكاز ٢- طريقة التوزيع المعدل؟

أولاً : تصوير جدول النقل والحلول المبدئية :

مناطق / مصانع	س١	س٢	س٣	طاقة المصانع
أ١	٥	٦	٨	٦٠٠
أ٢	٤	٧	٧	١٠٠٠
أ٣	٦	٨	٦	١٤٠٠
طاقة المناطق	١٢٠٠	٨٠٠	١٠٠٠	٣٠٠٠

ثانياً : الحل المبدئي باستخدام طريقة الركن الشمالي الشرقي :

المناطق / المصانع	س١	س٢	س٣	طاقة المصانع
أ١	٥ ‏ ٦٠٠	٦	٨	٦٠٠
أ٢	٤ ‏ ٦٠٠	٧ ‏ ٤٠٠	٧	١٠٠٠
أ٣	٦	٨ ‏ ٤٠٠	٦ ‏ ١٠٠٠	١٤٠٠
طاقة المناطق	١٢٠٠	٨٠٠	١٠٠٠	٣٠٠٠

ويكون الحل المبدئي ممكناً إذا كان عدد الخلايا المشغولة =

= عدد المصادر (المصانع) + عدد مناطق التوزيع – ١

= ٣ + ٣ – ١ = ٥

إجمالي تكلفة النقل =

= ٥×٦٠٠ ÷ ٤×٦٠٠ + ٧×٤٠٠ + ٨×٤٠٠ + ٦×١٠٠٠

= ٣٠٠٠ + ٢٤٠٠ + ٢٨٠٠ + ٣٢٠٠ + ٦٠٠٠

= ١٧٤٠٠ جنيه.

٢) الحل المبدئي بطريقة أدنى تكلفة في المصفوفة :

المناطق / المصانع	س١	س٢	س٣	طاقة المصانع
أ١	٥ / ٢٠٠	٦ / ٤٠٠	٨	٦٠٠
أ٢	٤ / ١٠٠٠	٧	٧	١٠٠٠
أ٣	٦	٨ / ٤٠٠	٦ / ١٠٠٠	١٤٠٠
طاقة المناطق	١٢٠٠	٨٠٠	١٠٠٠	٣٠٠٠

ويكون الحل المبدئي ممكناً إذا كان عدد الخلايا المشغولة =

= عدد المصادر + عدد مناطق التوزيع – ١

= ٣ + ٣ – ١ = ٥

وستكون التكلفة الإجمالية للنقل وفقاً للجدول المبدئي =

= ٥×٢٠٠ + ٦×٤٠٠ + ٤×١٠٠٠ + ٨×٤٠٠ + ٦×١٠٠٠

= ١٠٠٠+٢٤٠٠+٤٠٠٠+٣٢٠٠+٦٠٠٠= ١٦٦٠٠ جنيه.

ثانياً : اختبار مثالية الحل المبدئي :

١- باستخدام طريقة نقطة الإرتكاز (حجر الوطء)

يمكن تطبيق هذه الطريقة على جدول الحل المبدئي بطريقة الركن الشمالي الشرقي ، حيث :

المصانع / المناطق	س١	س٢	س٣	طاقة المصانع
أ١	٥ / ٦٠٠	٦	٨	٦٠٠
أ٢	٤ / ٦٠٠	٧ / ٤٠٠	٧	١٠٠٠
أ٣	٦	٨ / ٤٠٠	٦ / ١٠٠٠	١٤٠٠
طاقة المناطق	١٢٠٠	٨٠٠	١٠٠٠	٣٠٠٠

جدول لتقييم الخلايا الفارغة (غير الأساسية)

الخلية الفارغة	مسار الخلية	صافي التغير في التكلفة
أ١ س٢	أ١ س٢ - أ٢ س٢ + أ٢ س١ - أ١ س١	٦-٧+٤-٥=-٢
أ١ س٣	أ١ س٣ - أ٣ س٣ + أ٣ س٢ - أ٢ س٢ + أ٢ س١ - أ١ س١	٨-٦+٨-٧+٤-٥=٢
أ٢ س٣	أ٢ س٣ - أ٣ س٣ + أ٣ س٢ - أ٢ س٢	٧-٦+٨-٧=٢
أ٣ س١	أ٣ س١ - أ٣ س٢ + أ٢ س٢ - أ٢ س١	٧-٨+٧-٤=١

يتضح من تقييم الخلايا أن التغير في التكاليف إذا كان موجباً فإنه يؤدي إلى زيادة التكاليف ، أما إذا كان سالباً فإنه يؤدي إلى خفض التكاليف ، وبالنظر إلى الخلية أ$_1$ س$_2$ نجد أنها الخلية الخالية الوحيدة التي يؤدي النقل إليها إلى تخفيض التكلفة الكلية للنقل بمقدار ٢ جنيه عن كل وحدة يتم نقلها إلى هذه الخلية ثم نرسم هذه الخلية على النحو التالي :

	س$_1$	س$_2$
- أ$_1$	٥ / ٦٠٠	٦ / ×
+ أ$_2$	٤ / ٦٠٠	٧ / ٤٠٠

أصغر قيمة يمكن نقلها هي ٤٠٠ ، فهي تضاف على الخلايا الموجبة وتطــرح من الخلايا السالبة :

الخانات التي يشملها التعديل	الكمية
أ$_1$ س$_2$	٤٠٠
أ$_2$ س$_2$(-)	٤٠٠ - ٤٠٠ = صفر
أ$_2$ س$_1$ (+)	٦٠٠ + ٤٠٠ = ١٠٠٠
أ$_1$ س$_1$ (-)	٦٠٠ - ٤٠٠ = ٢٠٠

ومن هنا يمكن إعداد جدول النقل الجديد موضحاً به الكميات الجديــدة في كل خلية تأثرت بهذا التعديل ، أما الخلايا الي لم تتأثر بهذا التعديل تظل كما هي في جدول النقل السابق.

جدول النقل الثاني

المصانع / المناطق	س١	س٢	س٣	طاقة المصانع
أ١	[٥] ٢٠٠	[٦] ٤٠٠	[٨]	٦٠٠
أ٢	[٤] ١٠٠٠	[٧]	[٧]	١٠٠٠
أ٣	[٦]	[٨] ٤٠٠	[٦] ١٠٠٠	١٤٠٠
طاقة المناطق	١٢٠٠	٨٠٠	١٠٠٠	٣٠٠٠

التكلفة الكلية للنقل =

= ٥×٢٠٠ + ٦×٤٠٠ + ٤×١٠٠٠ + ٨×٤٠٠ + ٦×١٠٠٠

= ١٦٦٠٠ جنيه

ويلاحظ أن التكلفة الكلية للنقل قد انخفضت من ١٧٤٠٠ إلى ١٦٦٠٠ جنيه

جدول لتقييم الخلايا الفارغة (غير الأساسية)

الخلية الفارغة	مسار الخلية	صافي التغير في التكلفة
$أ_{١}س_{٣}$	$أ_{١}س_{٣}$ - $أ_{٣}س_{٣}$ + $أ_{٣}س_{٢}$ - $أ_{١}س_{٢}$	٨-٦+٨-٦=+٤
$أ_{٢}س_{٢}$	$أ_{٢}س_{٢}$ - $أ_{٢}س_{١}$ + $أ_{١}س_{١}$ - $أ_{١}س_{٢}$	٧-٤+٥-٦=+٢
$أ_{٢}س_{٣}$	$أ_{٢}س_{٣}$ - $أ_{٣}س_{٣}$ + $أ_{٣}س_{٢}$ - $أ_{١}س_{٢}$ + $أ_{١}س_{١}$ - $أ_{٢}س_{١}$	٧-٦+٨-٦-٥-٤=+٤
$أ_{٣}س_{١}$	$أ_{٣}س_{١}$ - $أ_{١}س_{١}$ + $أ_{١}س_{٢}$ - $أ_{٣}س_{٢}$	٦-٥+٦-٨=-١

يتضح من الجدول السابق أن الخلية المثالية هي الخلية أ$_{٣}$ س$_{١}$، يؤدي النقل إليها إلى تخفيض التكلفة الكلية للنقل بمقدار ١ جنيه عن كل وحدة يتم نقلها إلى هذه الخلية ثم نرسم هذه الخلية على النحو التالي :

	س$_{١}$	س$_{٢}$
-أ$_{١}$	[٥] ٢٠٠	[٦] ٤٠٠
+أ$_{٣}$	[٦]	[٨] ٤٠٠

أصغر قيمة يمكن نقلها هي ٢٠٠ ، فهي تضاف على الخلايا الموجبة وتطرح من الخلايا السالبة :

الخانات التي يشملها التعديل	الكمية
أ$_{٣}$ س$_{١}$	٢٠٠
أ$_{١}$ س$_{٢}$(+)	٤٠٠ +٢٠٠ = ٦٠٠
أ$_{٣}$ س$_{٢}$(-)	٤٠٠ - ٢٠٠ = ٢٠٠
أ$_{١}$ س$_{١}$	صفر

ومن هنا يمكن إعداد جدول النقل الجديد موضحاً به الكميات الجديدة في كل خلية تأثرت بهذا التعديل ، أما الخلايا الي لم تتأثر بهذا التعديل تظل كما هي في جدول النقل السابق ، ويكون جدول النقل الثالث على النحو التالي.

جدول النقل الثالث

المصانع \ المناطق	س$_{١}$	س$_{٢}$	س$_{٣}$	طاقة المصانع
أ$_{١}$	٥	٦ ، ٦٠٠	٨	٦٠٠
أ$_{٢}$	٤ ، ١٠٠٠	٧	٧	١٠٠٠
أ$_{٣}$	٦ ، ٢٠٠	٨ ، ٢٠٠	٦ ، ١٠٠٠	١٤٠٠
طاقة المناطق	١٢٠٠	٨٠٠	١٠٠٠	٣٠٠٠

التكلفة الكلية للنقل =

٦×١٠٠٠+ ٨×٢٠٠ + ٦ ×٢٠٠ ÷ ٤× ١٠٠٠ + ٦×٦٠٠ =

= ١٦٤٠٠ جنيه

جدول لتقنيم الخلايا الفارغة في الجدول الثالث

الخلية الفارغة	مسار الخنية	صافي التغير في التكلفة
أ$_{١}$س$_{١}$	أ$_{١}$س$_{١}$- أ$_{١}$س$_{٢}$ ÷ أ$_{٣}$س$_{٢}$ - أ$_{٣}$س$_{١}$	٥-٦+٨-٦=+١
أ$_{١}$س$_{٣}$	أ$_{١}$س$_{٣}$- أ$_{٣}$س$_{٣}$ + أ- س$_{١}$ - أ$_{١}$س$_{٢}$	٨-٦+٨-٦=+٤
أ$_{٢}$س$_{٢}$	أ$_{٢}$س$_{٢}$- أ$_{٣}$س$_{٢}$ ÷ أ- س$_{١}$ - أ$_{٢}$س$_{١}$	٧-٨+٦-٤=+١
أ$_{٢}$س$_{٣}$	أ$_{٢}$س$_{٣}$- أ$_{٣}$س$_{٣}$ + أ- س$_{١}$ - أ$_{٢}$س$_{١}$	٧-٦+٦-٤=+٣

ومن هنا يتبين أن الجدول الثالث يمثل الحل الأمثل ، حيث أن قيمة صافي التغير لجميع الخلايا الفارغة موجبة ، أي أن ملأ أي خلية من هذه الخلايا سيؤدى إلى زيادة التكاليف الكلية .

ويتلخص الحل الأمثل في :

١. يتم تخصيص طاقة المصنع أ١ بالكامل (٦٠٠ وحدة) لمنطقة التوزيع س٢

٢. يتم تخصيص طاقة المصنع أ٢ بالكامل ١٠٠٠ وحدة لمنطقة التوزيع س١

٣. يتم تخصيص طاقة المصنع أ٣ (١٤٠٠ وحدة) كما يلي :

- لمنطقة التوزيع س١ = ٢٠٠ وحدة
- لمنطقة التوزيع س٢ = ٢٠٠ وحدة
- لمنطقة التوزيع س٣ = ١٠٠٠ وحدة

٤. التكاليف الكلية للنقل = ١٦٤٠٠ جنيه

٢- اختبار مثالية الحل المبدئي باستخدام طريقة التوزيع المعدل

يمكن تطبيق هذه الطريقة على جدول الحل المبدئي بطريقة الركن الشمالي الشرقي ، نجد ما يلي :

المناطق / المصانع	س١	س٢	س٣	طاقة المصانع
أ١	[٥] ٦٠٠	[٦]	[٨]	٦٠٠
أ٢	[٤] ٦٠٠	[٧] ٤٠٠	[٧]	١٠٠٠
أ٣	[٦]	[٨] ٤٠٠	[٦] ١٠٠٠	١٤٠٠
طاقة المناطق	١٢٠٠	٨٠٠	١٠٠٠	٣٠٠٠

إجمالي تكاليف النقل = ١٧٤٠٠ جنيه.

وحيث أن : $ص_م + ع_ن = ك_{م ن}$ بالنسبة للخلايا المشغولة

ص$_{1}$ + ع$_{1}$ = ٥

صفر + ع$_{1}$ = ٥   أي أن : ع$_{1}$ = ٥

ص$_{2}$ + ع$_{1}$ = ٤

ص$_{2}$ + ٥ = ٤   أي أن : ص$_{2}$ = -١

ص$_{2}$ + ع$_{2}$ = ٧

-١ + ع$_{2}$ = ٧   أي أن : ع$_{2}$ = ٨

ص$_{3}$ + ع$_{2}$ = ٨

ص$_{3}$ + ٨ = ٨   أي أن : ص$_{3}$ = صفر

ص$_{3}$ + ع$_{3}$ = ٦

صفر + ع$_{3}$ = ٦   أي أن ع$_{3}$ = ٦

والخطوة الثانية تطبيق مقياس أو تحسين التكاليف على الخلايا الخالية :

مقياس التحسين : ك$_{من}$ - ص$_{م}$ - ع$_{ن}$

الخلايا الخالية	ك$_{من}$ - ص$_{م}$ - ع$_{ن}$
أ$_{1}$س$_{2}$	٦-صفر-٨ = -٢
أ$_{1}$س$_{3}$	٨-صفر-٦ = ٢
أ$_{2}$س$_{3}$	٧-(-١)-٦ = ٢
أ$_{3}$س$_{1}$	٦-صفر-٥ = ١

ويتضح من تقييم الخلايا السابقة أن الخلية أ$_{1}$س$_{2}$ أنها الخلية الوحيدة التي يؤدي النقل إليها إلى تخفيض التكلفة الكلية للنقل بمقدار ٢ جنيه عن كل وحدة يتم نقلها إلى هذه الخلية ثم نرسم هذه الخلية على النحو التالي :

	س١	س٢
أ١ -	[٥] ٦٠٠	[٦]
أ٢ +	[٤] ٦٠٠	[٧] ٤٠٠

أصغر قيمة يمكن نقلها هي ٤٠٠ ، فتضاف على الخلايا الموجبة وتطرح من الخلايا السالبة كما يلي :

الخانات التي يشملها التعديل	الكمية
أ١ س١	٦٠٠ - ٤٠٠ = ٢٠٠
أ١ س٢	صفر + ٤٠٠ = ٤٠٠
أ٢ س٢	٤٠٠ - ٤٠٠ = صفر
أ٢ س١	٦٠٠ + ٤٠٠ = ١٠٠٠

جدول النقل الثاني

المناطق / المصانع	س١	س٢	س٣	طاقة المصانع
أ١	[٥] ٢٠٠	[٦] ٤٠٠	[٨]	٦٠٠
أ٢	[٤] ١٠٠٠	[٧]	[٧]	١٠٠٠
أ٣	[٦]	[٨] ٤٠٠	[٦] ١٠٠٠	١٤٠٠
طاقة المناطق	١٢٠٠	٨٠٠	١٠٠٠	٣٠٠٠

التكلفة الكلية للنقل =

= ٥×٢٠٠ + ٦×٤٠٠ + ٤×١٠٠٠ + ٨×٤٠٠ + ٦×١٠٠٠

= ١٦٦٠٠ جنيه

وهذا الحل ليس الحل الأمثل حيث مازال تقييم الخلايا الخالية سالباً، وعلى ذلك نكرر القواعد السابقة على الجدول السابق ، بافتراض أن $ص_١$ = صفر للخلايا المشغولة ، حيث :

- $ص_١ + ع_١ = ٥$
- صفر + $ع_١ = ٥$ أي أن : $ع_١ = ٥$
- $ص_١ + ع_٢ = ٦$
- صفر + $ع_٢ = ٦$ أي أن : $ع_٢ = ٦$
- $ص_٢ + ع_١ = ٤$
- $ص_٢ + ٥ = ٤$ أي أن : $ص_٢ = -١$
- $ص_٣ + ع_٢ = ٨$
- $ص_٣ + ٦ = ٨$ أي أن : $ص_٣ = ٢$
- $ص_٣ + ع_٣ = ٦$
- $٢ + ع_٣ = ٦$ أي أن $ع_٣ = ٤$

والخطوة الثانية تطبيق مقياس أو تحسين التكاليف على الخلايا الخالية :

الخلايا الخالية	$ك_{م ن} - ص_م - ع_ن$
$أ_١ س_٣$	٨−صفر−٤ = ٤
$أ_٢ س_٢$	٧−(−١)−٦ = ٢
$أ_٢ س_٣$	٧−(−١)−٤ = ٤
$أ_٣ س_١$	٦−٢−٥ = −١

ويتضح من تقييم الخلايا السابقة أن الخلية المثالية $أ_٢ س_١$ حيث يؤدي النقل إليها إلى تخفيض التكلفة الكلية للنقل بمقدار ١ جنيه عن كل وحدة يتم نقلها إلى هذه الخلية ثم نرسم هذه الخلية على النحو التالي :

	س١	س٢
- أ١	[٥] ٢٠٠	[٦] ٤٠٠
+ أ٣	[٦]	[٨] ٤٠٠

أصغر كمية تضاف على الخلايا الموجبة وتطرح من الخلايا السالبة هي ٢٠٠

أ٣ س١	صفر + ٢٠٠ = ٢٠٠
أ١ س٢	٤٠٠ +٢٠٠ = ٦٠٠
أ٣ س٢	٤٠٠ - ٢٠٠ = ٢٠٠
أ١ س١	٢٠٠ - ٢٠٠ = صفر

جدول النقل الثالث

المناطق / المصانع	س١	س٢	س٣	طاقة المصانع
أ١	[٥]	[٦] ٦٠٠	[٨]	٦٠٠
أ٢	[٤] ١٠٠٠	[٧]	[٧]	١٠٠٠
أ٣	[٦] ٢٠٠	[٨] ٢٠٠	[٦] ١٠٠٠	١٤٠٠
طاقة المناطق	١٢٠٠	٨٠٠	١٠٠٠	٣٠٠٠

التكلفة الكلية للنقل =

= ٦×٦٠٠ + ٤× ١٠٠٠ ÷ ٦ ×٢٠٠ + ٨×٢٠٠ + ٦×١٠٠٠

= ١٦٤٠٠ جنيه

وهذا الحل ليس الحل الأمثل حيث متزال تقييم الخلايا الخالية سالباً، وعلى ذلك نكرر القواعد السابقة على الجدول السابق ، حيث :

- $ص_{١}$ + $ع_{-}$ = ٦
- صفر + $ع_{-}$ = ٦   أي أن : $ع_{٢}$ = ٦
- $ص_{٣}$ + $ع_{-}$ = ٨
- $ص_{٣}$ + ٦ = ٨   أي أن : $ص_{٣}$ = ٢
- $ص_{٣}$ + $ع_{.}$ = ٦
- ٢ + $ع_{١}$ = ٦   أي أن $ع_{١}$ = ٤
- $ص_{٢}$ + $ع_{.}$ = ٤
- $ص_{٢}$ + ٤ = ٤   أي أن $ص_{٢}$ = صفر
- $ص_{٣}$ + $ع_{-}$ = ٦
- ٢ + $ع_{٣}$ = ٦   أي أن $ع_{٣}$ = ٤

والخطوة الثانية تطبيق مقياس أو تحسين التكاليف على الخلايا الخالية :

الخلايا الخالية	$ك_{من}$ – $ص_{م}$ – $ع_{ن}$
$أ_{١}$ $س_{١}$	٥–صفر–٤ = ١
$أ_{١}$ $س_{٣}$	٨–صفر–٤ = ٤
$أ_{٢}$ $س_{٢}$	٧–صفر–٦ = ١
$أ_{٢}$ $س_{٣}$	٧–صفر–٤ = ٣

يتضح من هذا التقييم أن جميع الخلايا ذات أثر موجب على التكلفــة ، أي أن ملأ أي خلية من هذه الخلايا سيؤدى إلى زيــادة التكــاليف الكليــة ، ويعتبــر الجدول الثالث هو الحل الأمثل.

ويتلخص الحل الأمثل في :

١. يتم تخصيص طاقة المصنع $أ_1$ بالكامل (٦٠٠ وحدة) لمنطقة التوزيع $س_2$
٢. يتم تخصيص طاقة المصنع $أ_2$ بالكامل ١٠٠٠ وحدة لمنطقة التوزيع $س_1$
٣. يتم تخصيص طاقة المصنع $أ_3$ (١٤٠٠ وحدة) كما يلي :
   - لمنطقة التوزيع $س_1$ = ٢٠٠ وحدة
   - لمنطقة التوزيع $س_2$ = ٢٠٠ وحدة
   - لمنطقة التوزيع $س_3$ = ١٠٠٠ وحدة
٤. التكاليف الكلية للنقل = ١٦٤٠٠ جنيه

وهي نفس النتيجة التي توصلنا إليها باستخدام طريقة نقطة الإرتكــاز أو حجر الوطء.

تمارين على طريقة النقل

١) أوجد الحل المبدئي والحل الأمثل للوصول لأقل تكلفة ممكنة :

من \ إلى	س١	س٢	س٣	العرض
أ١	٦	٨	١٠	١٥٠
أ٢	٧	١١	١١	١٧٥
أ٣	٤	٥	١٢	٢٧٥
الطلب	٢٠٠	١٠٠	٣٠٠	٦٠٠

٢) باستخدام طريقة نقطة الإرتكاز (حجر الوطء) أوجد الحل المبـدئي والحـل الأمثل للتكلفة لنموذج النقل التالي :

من \ إلى	س١	س٢	س٣	س٤	العرض (الإنتاج)
أ١	١٢	٤	٩	٥	٥٥
أ٢	٨	١	٦	٦	٤٥
أ٣	١	١٢	٤	٧	٣٠
الطلب (الإستهلاك)	٤٠	٢٠	٥٠	٢٠	١٣٠

٣) المطلوب إيجاد الحل المبدئي بأي طريقة تراها ومن ثم أوجد الحل الأمثـل باستخدام طريقة التوزيع المعدل للوصول لأقل تكلفة ممكنة :

من \ إلى	س$_{١}$	س$_{٢}$	س$_{٣}$	العرض (الإنتاج)
أ$_{١}$	٣	٣	٢	٢٥
أ$_{٢}$	٤	٢	٣	٤٠
أ$_{٣}$	٣	٢	٣	٣٠
الطلب (الإستهلاك)	٣٠	٣٠	٣٥	٩٥

٤) أوجد الحل المبدئي والحل الأمثل لتكاليف النقل باستخدام المعلومات الآتية:

- الإنتاج : أ$_{١}$ = ٤ وحدات ، أ$_{٢}$= ٦ وحدات ، أ$_{٣}$= ٣ وحدات
- الإستهلاك : س$_{١}$ = ٦ وحدات ، س$_{٢}$= ٥ وحدات ، س$_{٣}$= ٢ وحدة
- أسعار النقل :

أ$_{١}$س$_{١}$ = ١٠ أ$_{١}$س$_{٢}$ = ٥ أ$_{١}$س$_{٣}$ = ١٥

أ$_{٢}$س$_{١}$ = ١٢ أ$_{٢}$س$_{٢}$ = ٤ أ$_{٢}$س$_{٣}$ = ١٣

أ$_{٣}$س$_{١}$ = ١٠ أ$_{٣}$س$_{٢}$ = ٥ أ$_{٣}$س$_{٣}$ = ١٥

٥) عند إعداد نموذج النقل ، ما هو الهدف الذي نسعى إلى تحقيقه من إعـداد النموذج ؟ ما هو الفرق بين الحل المبدئي والحل الأمثل؟. قارن بمثال رقمـي من عندك بين طريقتي الشمال الشرقي وطريقة أدنى تكلفـة للوصـول للحـل المبدئي، واشرح طريقة نقطة الإرتكاز للوصول للحل الأمثل ؟

مراجع الكتاب

أولاً : المراجع العربية

١- د. إبراهيم محمد مهدى ، وآخرون ، "الإحصاء التطبيقي وبحوث العمليات" ، ٢٠٠١ ، مكتبة الجلاء الجديدة، المنصورة.

٢- د. عادل عبد الحميد عز ، أساليب التحليل الكمي ، مكتبة دار النهضة العربية ، ١٩٩٧م

٣- د. هاله عبد الله الخولي "بحوث العمليات في المحاسبة" ، ٢٠٠١م ، كلية التجـارة ، جامعة القاهرة ١٩٩٩م.

٤- د. محمد عبد العال النعيمي وآخرون ، "بحوث العمليات " ١٩٩٩م ، دار وائل للنشر ، عمان ، الأردن .

٥- د. علي الحلاونه ، وآخرون ، "بحوث العمليات " دار المستقبل للنشر والتوزيع ، الأردن

٦- د. أحمد سرور محمد ، " بحوث العمليات " ١٩٩٧ ، مكتبة عين شمس ، القاهرة .

٧- د. جلال ابراهيم العبد " الأساليب الكمية في اتخاذ القرارات الإدارية" دار الجامعة الجديدة للنشر ، الأسكندرية ٢٠٠٤م.

٨- د. حسن علي مشرفي ، "بحوث العمليات " ، دار المسيرة للنشر والتوزيع ، ، عمـان ، الأردن ، ١٩٩٧م.

٩- د. محمد أسعد عبد الوهاب ، " مقدمة في بحوث العمليات " ، مكتبة ومطبعة الإشعاع ، الأسكندرية ، الطبعة الثالثة ، ١٩٩٨م.

١٠-د. سلطان محمد عبد الحميد وآخرون ، " مقدمة في بحوث العمليات، مكتبـة الجـلاء الجديدة ، ٢٠٠١-٢٠٠٢م .

١١-د. حمدي طه ، مقدمة في بحوث العمليات ، دار المريخ للنشر

١٢-د. سمير محمد عبد العزيز ن الإقتصاد الإداري ، مؤسسة شباب الجامعات ، ١٩٩١م

١٣-د. صلاح وهيب ، دراسة الجدوى ، مكتبة عين شمس.

١٤-د. عادل طه فايد ، دراسة الجدوى ، مكتبة عين شمس ، ١٩٩٩م.

١٥-د. رشاد الحملاوي وآخرين ، إدارة العمليات ، مكتبة عين شمس ، ١٩٩٩م

١٦-د. عبد المنعم فليح وآخرون "بحوث العمليات في المحاسبة"، دار الثقافة العربية، القاهرة، ١٩٩٠م.

١٧-د. دلال صادق بطرس "بحوث العمليات في المحاسبة"، دار الثقافة العربية، ١٩٩٣م

١٨-د. أحمد عبد المالك محمد وآخرون : "بحوث العمليات في المحاسبة"، كلية التجارة، جامعة الأسكندرية، ٢٠٠٤م.

١٩-د. نبيل عبد العظيم حسين، "بحوث العمليات"، الجزء الأول، ١٩٩٦

ثانياً : المراجع الأجنبية

(1) HILLER , F. S. , and LIEBERMAN , G. J. , **Introduction To Operation Research** , Mc.Graw Hill International Editions , 1990.

(2) ECKER , J. G. and KUPFERSCHMID , **Introduction To Operation Research** , John-Wiley & Sons , New York , 1988 .

(3) GUPTA , S. and COZZOLINO , J. M. , **Fundamentals of Operation Research for Management** , Holden – Day , Inc. , 1974 .

(4) FOGIEL , M. , **The Operations Research Problem Solver** , New Jersey , 1989.

(5) KOTHARI , C. R. , **An Introduction To Operational Research** , VILAS , Publishing House POTLTD , New Delhi , 1982 .

(6) TAHA , H. A. , **Operations Research** , 2nd ed. , Macmillan Publishing , 2000.

(7) WAGNER , H. M. , **Principles of Operations Research** , Prentice Hall of India , New Delhi , 1982 .

(8) WILKES , F. M. , **Elements of Operational Research** , Mc.Graw Hill International Editions , 1987.

(9) WILSON , C. **Operational Research for Students of Management** , The Pitman Press , London , 1973 .

المعمل التجاري للطباعة والتصوير
كلية التجارة ـــ جامعة المنصورة
ت: ٠٥٠٢٢٦٥٢٧٢

رقم الإيداع بدار الكتب
١٥٥٨١/ ٢٠٠٦ م